Càlcul Infinitesimal I / Càlcul I — Codi: 21702 / 21762

Temps: 15 minuts — **14 de Gener de 2005**

Qüestió relativa als problemes d'aplicació

- Considereu un flux en el pla per al qual la posició (x, y) i la velocitat (u, v) estan lligades per les restriccions:

$$x = \ln u + v^2\,, \qquad y = u^2 + v^2$$

(a) Demostreu que per a velocitats properes a $(1, 1)$ la velocitat ve determinada per la posició.

(b) En el cas que les restriccions siguin

$$ux - 1 - uv^2 = 0\,, \qquad \frac{y}{v} - \frac{u}{v} - 2u = 0$$

proveu que per a velocitats properes a $(1, 1)$ la velocitat ve determinada per la posició i calculeu l'acceleració per a aquest cas.

Resolució:

(a) $f(u, v) = \ln u + v^2$, $\quad f_2(u, v) = u^2 + v^2$, $\quad f = (f_1, f_2)$; $f \in C^1(\{(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ u > 0\})$

$$Df(u,v) = \begin{pmatrix} 1/u & 2v \\ 2u & 2v \end{pmatrix}, \quad Df(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det Df(1,1) = -2 \neq 0, \quad f(1,1) = (1,2)$$

Podem aplicar el teorema de la funció inversa en el punt $(1, 1)$ i per tant existeix $f^{-1} \in C^1$ definida en un entorn de $(1, 2)$

$$(x, y) = f(u, v) \Leftrightarrow (u, v) = f^{-1}(x, y)\,.$$

(b) $F(x, y, u, v) = \Big(ux - 1 - uv^2,\ \dfrac{y}{v} - \dfrac{u}{v} - 2u\Big)$; si $u = v = 1$, les equacions $F = 0$ es verifiquen si $x-1-1 = 0$ i $y-1-2 = 0$, és a dir, $x = 2$ i $y = 3$. Podem aplicar el teorema de la funció implícita i veure que (u, v) són funcions implícites de (x, y); F és C^1 en $(2, 3, 1, 1)$; $\left|\dfrac{\partial F}{\partial(u,v)}(2,3,1,1)\right| = \begin{vmatrix} x - v^2 & -2uv \\ -\dfrac{1}{v} - 2 & -\dfrac{y}{v^2} + \dfrac{u}{v^2} \end{vmatrix}(2,3,1,1) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Per tant, sabem que (u, v) són funcions de (x, y). Ara suposem que $(x, y, u, v) = (x(t), y(t), u(t), v(t))$ i derivem les equacions:

$$\left.\begin{aligned} \dot u x + u\dot x - \dot u v^2 - 2uv\dot v = 0 \\ \frac{v\dot y - y\dot v}{v^2} - \frac{v\dot u - u\dot v}{v^2} - 2\dot u = 0 \end{aligned}\right\}$$

quan $x = 2$, $y = 3$, $u = 1$ i $v = 1$ tenim $\dot x = u = 1$, $\dot y = v = 1$ i, per tant,

$$\left.\begin{aligned} 2\dot u + 1 - \dot u - 2\dot v = 0 \\ 1 - 3\dot v - \dot u + \dot v - 2\dot u = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \dot u - 2\dot v + 1 = 0 \\ -3\dot u - 2\dot v + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \dot u = 0, \quad \dot v = 1/2\,.$$

També es pot fer aillant $x = \dfrac{1}{u} + v^2$ i $y = u + 2uv$ i aplicant el teorema de la funció inversa en $(1, 1)$ com en (a).

Càlcul Infinitesimal I / Càlcul I — Codi: 21702 / 21762

Temps: 2 hores 20 minuts — **14 de Gener de 2005**

Problemes

1. (5 punts) Considereu la funció $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}} - x - 1 & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (0,0) \end{cases}$, on $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

   (a) Si $\alpha = \beta = 1$, calculeu $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$ i $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$.

   (b) Si $\alpha = \beta = 1$, què podeu dir de la continuïtat de la funció f?

   (c) Doneu condicions sobre α i β que assegurin la continuïtat de f a tot $\mathbb{R}^2$.

   (d) Existeixen les derivades parcials de f a tot $\mathbb{R}^2$?

   (e) Doneu condicions sobre α i β que assegurin que f és $C^1(\mathbb{R}^2)$.
   (Indicació: recordeu que $\lim_{(a,b)} e^{g(x,y)} = e^{\lim_{(a,b)} g(x,y)}$.)

Resolució:

(a) $\alpha = \beta = 1$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0} e^{0/x^2} - x - 1 = \lim_{x\to 0} -x = 0$$
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0} e^{0/y^2} - 1 = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

(b) $\alpha = \beta = 1$. Cal calcular $\lim_{(0,0)} f(x,y)$. Fem límits segons rectes $y = mx$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} e^{\frac{mx^2}{x^2(1+m^2)}} - x - 1 = e^{\frac{m}{1+m^2}} - 1$$

El límit depèn de m, per tant, és diferent a cada recta; aleshores $\lim_{(0,0)} f(x,y)$ no existeix i per tant, f no és contínua en $(0,0)$.
Fora del $(0,0)$, és contínua per generació. Per tant, f és contínua a $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ si $\alpha = \beta = 1$.

(c) Ja sabem que f és contínua a $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Per veure si és contínua en $(0,0)$ cal calcular

$$\lim_{(0,0)} f(x,y) = e^{\lim_{(0,0)} \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}} - 1\,.$$

Ja sabem que si $\alpha = \beta = 1$, aquest límit no existeix. En els altres casos, com $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, sempre tenim que $\alpha + \beta > 2$. Aleshores usem el criteri de les coordenades polars; fent $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,

$$\left|\frac{r^\alpha \cos^\alpha\theta\, r^\beta \sin^\beta\theta}{r^2}\right| \leq r^{\alpha+\beta-2} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad \text{si } \alpha+\beta > 2.$$

Per tant, tenim que $\lim_{(0,0)} \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2} = 0$ i podem concloure que $\lim_{(0,0)} f(x,y) = e^0 - 1 = 0 = f(0,0)$ i f és contínua en $(0,0)$. Podem concloure, doncs, que si $\alpha + \beta > 2$, f és contínua a tot $\mathbb{R}^2$.

(d) f és C^∞ a $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ i per tant, té derivades parcials si $(x,y) \neq (0,0)$. Per veure si les derivades existeixen en $(0,0)$, les calculem:

$$D_x f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - t - 1 - 0}{t} = \lim_{t\to 0} -1 = -1$$
$$D_y f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - 1 - 0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0\,.$$

Per tant, existeixen les derivades parcials a tot $\mathbb{R}^2$.

(e) Per veure si f és C^1, cal calcular primer les derivades parcials a tot $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} D_x f(x,y) = \dfrac{(\alpha-2)x^{\alpha+1}y^{\beta} + \alpha x^{\alpha-1}y^{\beta+2}}{(x^2+y^2)^2} e^{\frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}} - 1\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ D_x f(0,0) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_f(x,y) = \dfrac{(\beta-2)x^{\alpha}y^{\beta+1} + \beta x^{\alpha+2}y^{\beta-1}}{(x^2+y^2)^2} e^{\frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}} \\ D_y f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Per tal d'assegurar que $\lim\limits_{(0,0)} D_x f(x,y) = -1$ ens cal, primer $\alpha+\beta > 2$ per tal que $\lim e^{\frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}}$ existeixi i sabem que valdrà 1. Així, només cal discutir: $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{(\alpha-2)x^{\alpha+1}y^{\beta} + \alpha x^{\alpha-1}y^{\beta+2}}{(x^2+y^2)^2}$. Polars: $x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$

$$\left| \frac{(\alpha-2)r^{\alpha+1}(\cos\theta)^{\alpha+1}r^{\beta}(\sin\theta)^{\beta} + \alpha r^{\alpha-1}(\cos\theta)^{\alpha-1}r^{\beta+2}(\sin\theta)^{\beta+2}}{r^4} \right| \leq r^{\alpha+\beta-3}(|\alpha-2| + |\alpha|) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0\,,$$

si $\alpha+\beta > 3$; aleshores, $\lim\limits_{(0,0)} D_x f(x,y) = -1$ i tenim que $D_x f$ contínua a $\mathbb{R}^3$.
Si $\alpha+\beta = 3$, fent rectes $y = mx$ tenim:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{(\alpha-2)x^{\alpha+1}m^{\beta}x^{\beta} + \alpha x^{\alpha-1}m^{\beta+2}x^{\beta+2}}{x^4(1+m^2)^2} = \frac{(\alpha-2)m^{\beta} + \alpha m^{\beta+2}}{(1+m^2)^2}$$

depèn de m; aleshores el límit no existeix.
Per tant, $D_x f$ és contínua si, i només si, $\alpha+\beta > 3$. El cas de la $D_y f$ és totalment anàleg: si $\alpha+\beta > 3$: $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{(\beta-2)x^{\alpha}y^{\beta+1} + \beta x^{\alpha+2}y^{\beta-1}}{(x^2+y^2)^2}$. El fem per polars: $x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$

$$\left| \frac{(\beta-2)r^{\alpha+\beta+1}(\cos\theta)^{\alpha}(\sin\theta)^{\beta+1} + \beta r^{\alpha+\beta+1}(\cos\theta)^{\alpha+2}(\sin\theta)^{\beta}}{r^4} \right| \leq r^{\alpha+\beta-3}(|\beta-2| + |\beta|) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0\,,$$

si $\alpha+\beta > 3$. Igualment, si $\alpha+\beta = 3$, fent rectes $y = mx$ tenim que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{(\beta-2)x^{\alpha}m^{\beta+1}x^{\beta+1} + \beta x^{\alpha+2}m^{\beta-1}x^{\beta-1}}{x^4(1+m^2)^2} = \frac{(\beta-2)m^{\beta+1} + \beta m^{\beta-1}}{(1+m^2)^2}$$

depèn de m. Conclusió: f és $C^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \alpha+\beta > 3$.

2. (6 punts) Donada una funció

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), \end{array}$$

de classe C^1 tal que $f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)) \neq (0,0,0)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, el conjunt

$$C_f = \{x \in \mathbb{R}^3,\ \exists\, t \in \mathbb{R},\ x = f(t)\} = f(\mathbb{R})$$

defineix una corba a $\mathbb{R}^3$.

(a) Siguin $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ funcions de classe $C^1(\mathbb{R})$ tals que $f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)) \neq (0,0,0)$ i $g'(t) = (g_1'(t), g_2'(t), g_3'(t)) \neq (0,0,0)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Definim la funció de dues variables $\rho : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $\rho(s,t) = \| f(s) - g(t) \|^2 = (f_1(s) - g_1(t))^2 + (f_2(s) - g_2(t))^2 + (f_3(s) - g_3(t))^2$. Doneu una fórmula pel gradient de $\rho(s,t)$ en funció de f, g i les seves derivades.

(b) Si $p = f(s_0)$ i $q = g(t_0)$, digueu quines condicions ha de verificar el vector $p - q$ per tal que p i q siguin els punts més propers entre c_f i c_g. (Useu que (s_0, t_0) ha de ser extrem de $\rho(s,t)$.)

(c) Doneu una expressió de la matriu Hessiana de $\rho(s,t)$ en el punt s_0, t_0 de l'apartat (b).

(d) Busqueu els punts més propers entre les rectes C_f i C_g, on $f(s) = (-1+2s, -1+s, s)$ i $g(t) = (t-1, 2t-1, -t+3)$.

Resolució:

(a) $\rho(s,t) = \| f(s) - g(t) \|^2 = (f_1(s) - g_1(t))^2 + (f_2(s) - g_2(t))^2 + (f_3(s) - g_3(t))^2$
$\dfrac{\partial \rho}{\partial s} = 2(f_1(s)-g_1(t))f_1'(s)+2(f_2(s)-g_2(t))f_2'(t)+2(f_3(s)-g_3(t))f_3'(s) = 2 < f(s)-g(t), f'(s) >$. Igualment,
$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 2 < f(s) - g(t), -g'(t) >$;
grad $\rho(s,t) = 2(< f(s) - g(t), f'(s) >, < f(s) - g(t), -g'(t) >)$.

(b) $p = f(s_0)$, $q = g(t_0)$. Perquè p i q siguin els punts més propers entre C_f i C_g cal que la distància de p a q sigui mínima; per tant $\rho(s,t)$ ha de tenir un mínim en s_0, t_0. Com que ρ és de classe C^1, (s_0, t_0) serà mínim si:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \rho}{\partial s_0}(s_0,t_0) = 0 \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t_0}(s_0,t_0) = 0 \end{array}\right\} \quad \text{és a dir} \quad \begin{array}{l} < f(s_0) - g(t_0), \quad f'(s_0) >= 0 \\ < f(s_0) - g(t_0), -g'(t_0) >= 0 \end{array}$$

Per tant, $f'(s_0)$ i $g'(t_0)$ són ortogonals al vector $p - q$.

(c) $\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial s^2} = 2(f_1(s) - g_1(t))f_1''(s) + 2(f_1'(s))^2 + 2(f_2(s) - g_2(t))f_2''(s) + 2(f_2'(s))^2 + 2(f_3(s)-$
$- g_3(t))f_3''(s) + 2(f_3'(s))^2 = 2 < f(s) - g(t), f''(s) > +2 \| f'(s) \|^2$.
$\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial s \partial t} = -2g_1'(t)f_1'(s) - 2g_2'(t)f_2'(s) - 2g_3'(t)f_3'(s) = -2 < f'(s), g'(t) >$.
$\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = 2 < f(s) - g(t), -g''(t) > +2 \| g'(t) \|^2$.

$$H(s,t) = 2 \begin{pmatrix} < f(s) - g(t), f''(s) > + \| f'(s) \|^2 & - < f'(s), g'(t) > \\ - < f'(s), g'(t) > & - < f(s) - g(t), g''(t) > + \| g'(t) \|^2 \end{pmatrix}$$

(d) $f(s) = (-1 + 2s, -1 + s, s)$, $\quad g(t) = (t - 1, 2t - 1, -t + 3)$, $\quad f'(s) = (2, 1, 1)$, $\quad g'(t) = (1, 2, -1)$.
$f(s) - g(t) = (2s - t, s - 2t, s + t - 3)$. Condició d'extrem:

$$\begin{array}{rcl} < f(s) - g(t), f'(s) > & = & 2(2s - t) + s - 2t + s + t - 3 = 0 \\ - < f(s) - g(t), g'(t) > & = & -(2s - t + 2s - 4t - s - t + 3) = 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 6s - 3t - 3 = 0 \\ 3s - 6t + 3 = 0 \end{array}\right\} \quad s_0 = 1, \quad t_0 = 1$$

$p = f(1) = (1, 0, 1)$, $q = g(1) = (0, 1, 2)$, $f(1) - g(1) = (1, -1, -1)$, $f'(1) = (2, 1, 1)$,
$f''(1) = (0, 0, 0)$, $g'(1) = (1, 2, -1)$, $g''(1) = (0, 0, 0)$.

$$H(1,1) = 2 \begin{pmatrix} 6 & -(2+2-1) \\ -(2+2-1) & 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix},$$

$\det H > 0$, traça $H > 0$, $(1,1)$ és un mínim.

3. (6 punts)

(a) Escriviu i demostreu la fórmula del gradient.

(b) Considereu la funció $g(\theta) = 1 - \sin\theta\cos\theta$ definida per $\theta \in [0, 2\pi]$.
Calculeu els seus extrems i demostreu que $g(\theta) \geq 1/2$.

(c) Sigui $h(x,y) = x^2 + y^2 - xy$. Demostreu que $h(x,y)$ només s'anul·la en el $(0,0)$. (Indicació: escriviu l'equació $h(x,y) = 0$ en coordenades polars).

(d) Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Discutiu la continuïtat de f.

(e) Calculeu les derivades direccionals de f en $(0,0)$. Es verifica la fórmula del gradient en el $(0,0)$?

(f) Discutiu en quins punts és f una funció C^1.

(g) Trobeu el valor de $m \in \mathbb{R}$ tal que $xD_x f(x,y) + yD_y f(x,y) = m(x,y)$ per a tot $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Resolució:

(a) Fórmula del gradient. $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $A = A^\circ$ i $a \in A$. Si f és $C^1(A)$, aleshores $\forall\, v$ vector de $\mathbb{R}^n$, $\| v \| = 1$, tenim $D_v f(a) = <\text{grad } f(a), v> = D_1 f(a) v_1 + \cdots + D_n f(a) v_n$.

Demostració. Considerem la funció d'una variable $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & g(t) \end{array}$ definida per $g(t) = f(a + tv)$.

Aleshores, g és C^1 i

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = D_v f(a).$$

Per tant, per calcular $D_v f(a)$ només cal saber calcular $g'(0)$. Calcularem $g'(t)$ usant la regla de la cadena, ja que $g = f \circ h(t)$, on

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longrightarrow & h(t) = a + tv = (a_1 + tv_1, \ldots, a_n + tv_n) \end{array}$$

Aleshores, $Df(x) = (D_1 f(x), \ldots, D_n f(x))$, $Dh(t) = h'(t) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ i, usant la regla de la cadena,

$g'(t) = Df(h(t))h'(t) = Df(a + tv) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = D_1 f(a + tv) v_1 + \cdots + D_n f(a + tv) v_n$. Ara substituim $t = 0$ i obtenim la fórmula del gradient.

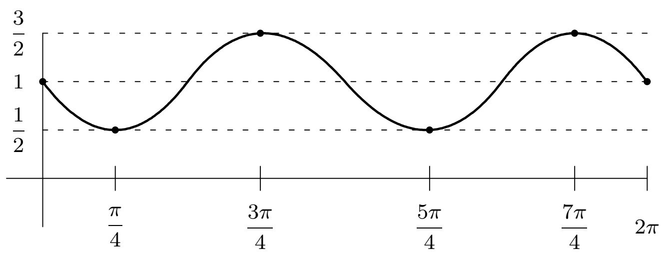
(b) $g(\theta) = 1 - \sin\theta\cos\theta = 1 - \dfrac{\sin 2\theta}{2}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

$g'(\theta) = -\cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow 2\theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$. Tenim possibles extrems a

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}, \quad \theta_3 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}, \quad \theta_4 = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}.$$

$$\begin{array}{ll} g''(\theta) = 2\sin 2\theta & \\ g''(\theta_1) = 2\sin\dfrac{\pi}{2} = 2 & \theta_1 = \dfrac{\pi}{4} \text{ és mínim relatiu} \\ g''(\theta_2) = 2\sin\dfrac{3\pi}{2} = -2 & \theta_2 = \dfrac{3\pi}{4} \text{ és màxim relatiu} \\ g''(\theta_3) = 2\sin\dfrac{5\pi}{2} = 2 & \theta_3 = \dfrac{5\pi}{4} \text{ és mínim relatiu} \\ g''(\theta_4) = 2\sin\dfrac{7\pi}{2} = -2 & \theta_4 = \dfrac{7\pi}{4} \text{ és màxim relatiu} \end{array}$$

El màxim absolut està entre θ_2, θ_4, 0, 2π; $g(\theta_2) = g(\theta_4) = \dfrac{3}{2}$, $g(0) = g(2\pi) = 1$.
Màxims absoluts: θ_2 i θ_4.
El mínim absolut estarà entre θ_1, θ_3, 0, 2π; $g(\theta_1) = \dfrac{1}{2} = g(\theta_3)$, $g(0) = g(2\pi) = 1$.
Màxims absoluts: θ_1 i θ_1. Així doncs, podem concloure que $\forall\, \theta \in [0, 2\pi]$: $\dfrac{1}{2} \le g(\theta) \le \dfrac{3}{2}$



(c) $h(x, y) = x^2 + y^2 - xy$, escrivim h en coordenades polars: $x = r\cos\theta$, $\quad y = r\sin\theta$:

$$h(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2 - r^2\cos\theta\sin\theta = r^2(1 - \cos\theta\sin\theta) = r^2 g(\theta) \ge r^2\frac{1}{2}$$

(per l'apartat anterior). Aleshores, $h(r\cos\theta, r\sin\theta)$ només s'anul·la en $r = 0$ i per tant, $h(x,y)$ només s'anul·la en $x = y = 0$.

(d) Cal calcular $\lim_{(0,0)} f(x,y)$. Usem coordenades polars:

$$\left|\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2 - r^2\cos\theta\sin\theta}\right| \le r\frac{1}{|1-\cos\theta\sin\theta|} = \frac{r}{|g(\theta)|} \underset{|g(\theta)|\ge 1/2}{\le} 2r \xrightarrow[r\to 0]{} 0\,.$$

Per tant, $\lim_{(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ i per tant, f és contínua en $(0,0)$; f també és contínua a $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ per generació, per tant, f és contínua a $\mathbb{R}^2$.

(e) $v = (v_1, v_2),\ \ v_1^2 + v_2^2 = 1$

$$D_v f(0,0) = \lim_{t\to\infty}\frac{t(tv_1,tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2v_1^2tv_2}{t(t^2v_1^2 + t^2v_2^2 - t^2v_1v_2)} = \lim_{t\to 0}\frac{v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2-v_1v_2} = \frac{v_1^2v_2}{1-v_1v_2} \quad (*)$$

Segons la fórmula del gradient, $Dvf(0,0) = D_1f(0,0)v_1 + D_2f(0,0)v_2$. Però, per (*), amb $v = (1,0)$ i $v = (0,1)$ tenim que: $D_1f(0,0) = 0$, $D_2f(0,0) = 0$. Per tant la fórmula no es verifica.

(f) f és $C^1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ per generació, però no pot ser C^1 en $(0,0)$ perquè aleshores s'hauria de verificar la fórmula del gradient.

(g) $D_xf(x,y) = \dfrac{2xy^3 - x^2y^2}{(x^2+y^2-xy)^2},\ \ D_yf(x,y) = \dfrac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2-xy)^2}$

$$xD_xf + yD_yf = \frac{2x^2y^3 - x^3y^2 + yx^4 - x^2y^3}{(x^2+y^2-xy)^2} = \frac{x^2y^3 - x^3y^2 + yx^4}{(x^2+y^2-xy)^2} = \frac{x^2y(y^2-xy+x^2)}{(x^2+y^2-xy)^2} = f(x),$$

per a $(x,y) \neq (0,0)$. Si $(x,y) = (0,0)$, la igualtat es verifica per a tot m, per tant $m = 1$.

4. (3 punts) Considerem la successió (a_p) definida recurentment per $a_1 = \sqrt{2}$ i $a_{p+1} = \sqrt{2\sqrt{a_p}}$

(a) Proveu per inducció $0 < a_p < a_{p+1} < 2$.

(b) Discutiu si (a_p) té límit i, en cas que en tingui, calculeu-lo.

Resolució:

(a) $a_1 = \sqrt{2},\ \ a_2 = \sqrt{2\sqrt{a_1}} = 2^{5/8};\ \ 0 < a_1 < a_2 < 2$, ja que

$$\sqrt{2} < 2^{5/8} = 2^{1/8}\sqrt{2}\,, \qquad 2^{5/8} < 2, \text{ ja que } 5/8 < 1.$$

Hipòtesi d'inducció: suposem que per a un cert $p \ge 1$, tenim $a < a_p < a_{p+1} < 2$.
Volem veure $0 < a_{p+1} < a_{p+2} < 2$. Clarament tots els termes de la successió verifiquen $a_p > 0$.

$$a_{p+1} < a_{p+2} \Leftrightarrow \sqrt{2\sqrt{a_p}} < \sqrt{2\sqrt{a_{p+1}}} \Leftrightarrow 2\sqrt{a_p} < 2\sqrt{a_{p+1}} \Leftrightarrow \sqrt{a_p} < \sqrt{a_{p+1}} \Leftrightarrow a_p < a_{p+1}$$

(cert per hipòtesi d'inducció).

$$a_{p+2} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{2\sqrt{a_{p+1}}} < 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{a_{p+1}} < 4 \Leftrightarrow \sqrt{a_{p+1}} < 2 \Leftrightarrow a_{p+1} < 4$$

(cert per hipòtesi d'inducció, ja que $a_{p+1} < 2$).

(b) (a_p) successió creixent i acotada superiorment, per tant, existeix $\ell = \lim_{p\to\infty} a_p$, on ℓ verifica

$$\ell = \sqrt{2\sqrt{\ell}} \Leftrightarrow \ell^2 = 2\sqrt{\ell} \Leftrightarrow \ell^4 = 4\ell \underset{\ell>0}{\Leftrightarrow} \ell^3 = 4 \Leftrightarrow \ell = \sqrt[3]{4}\,.$$