**Càlcul Infinitesimal I / Càlcul I** **Codi: 21702 / 21762**

Temps: 1 hora 40 minuts 14 de gener de 2008

---

## Problemes

1. (7 punts) Sigui $f(x,y) = y + \sin(\alpha x + \beta y) + (1+y)^x$, on $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ són paràmetres.

   (a) Calculeu el desenvolupament de Taylor de $f(x,y)$ en $(0,0)$ fins termes de grau tres (inclosos).

   (b) Estudieu si per a alguns valors de $\alpha$ i $\beta$ la funció $f(x,y)$ pot tenir un extrem relatiu en $(0,0)$ i, en cas afirmatiu, digueu quin tipus d'extrem és.

   (c) Determineu els valors de $\alpha$ i $\beta$ pels quals el polinomi de Taylor de grau dos de $f(x,y)$ en $(0,0)$ és $p_2(x,y) = 1 + 2x + 2y + xy$. Per a aquests valors de $\alpha$ i $\beta$ verifiqueu que l'equació $f(x,y) = 1$ defineix $y$ com a funció implícita de $x$, $y = y(x)$, en un entorn de $(0,0)$ i trobeu el desenvolupament de Taylor de $y(x)$ fins termes de grau 2.

**Resolució:**

(a) Calculem el desenvolupament per generació:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + R_5(z), \qquad \sin(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y - \frac{(\alpha x + \beta y)^3}{3!} + R_5(x,y)$$

$$e^z = 1 + z + R_2(z); \qquad (1+y)^x = e^{x\ln(1+y)} = e^{x[y-(y^2/2)+R_3(y)]} = 1 + xy - \frac{1}{2}xy^2 + R_4(x,y)$$

$$f(x,y) = 1 + \alpha x + (\beta+1)y + xy - \frac{1}{6}(\alpha^3x^3 + 3\alpha^2\beta x^2y + 3\alpha\beta^2xy^2 + \beta^3y^3) - \frac{1}{2}xy^2 + R_4(x,y).$$

(b) Usant el desenvolupament de Taylor de l'apartat (a) tenim

$$D_xf(0,0) = \alpha\,, \qquad D_yf(0,0) = \beta + 1\,.$$

Així doncs, tenim un candidat a extrem en $(0,0)$ quan $\alpha = 0$ i $\beta = -1$. Les derivades parcials segones ens donen:

$$D_{xx}f(0,0) = 0\,, \qquad D_{xy}f(0,0) = 1\,, \qquad D_{yy}f(0,0) = 0\,,$$

i la corresponent matriu hessiana és

$$H = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} D_{xx}f(0,0) & D_{xy}f(0,0) \\ D_{xy}f(0,0) & D_{yy}f(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Els valors propis de $H$ són $\pm 1 \Longrightarrow$ punt de sella.

(c) $\alpha = 2$ i $\beta = 1$. Per aplicar el teorema de la funció implícita a $f(x,y) = 1$, observem que

(i) $f \in C^\infty$ entorn de $(x,y) = (0,0)$;

(ii) $f(0,0) = 1$;

(iii) $\dfrac{\partial f}{\partial g}(0,0) = 2 \neq 0$.

Per tant, l'equació $f(x,y) = 1$ ens permet aïllar $y = y(x)$ en un entorn de $(0,0)$ verificant:

(1) $y(x)$ és $C^\infty$

(2) $y(0) = 0$

(3) $f(x,\, y(x)) = 1 \Longleftrightarrow y(x) + \sin(2x + y(x)) + (1 + y(x))^x = 1.$

Per calcular les derivades de $y(x)$ en $x = 0$ ho podem fer derivant l'expressió anterior o observant primer que el seu desenvolupament de Taylor ens dóna:

$$f(x,\, y(x)) = 1 + 2x + 2y(x) + xy(x) + R_3(x,\, y(x)) = 1 + 2x + 2y(x) + xy(x) + R_3(x)$$

ja que $y(x) = 0 + R_1(x)$. Així:

$$\begin{aligned} 2x + 2y(x) + xy(x) + R_3(x) &= 0 \\ 2 + 2y'(x) + y(x) + xy'(x) + R_2(x) &= 0 \\ 2y''(x) + 2y'(x) + xy''(x) + R_1(x) &= 0\,. \end{aligned}$$

Fent $x = 0$ i $y(0) = 0$ tenim $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$, d'on

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + R_3(x) = -x + \frac{x^2}{2} + R_3(x)\,.$$

2. (5 punts) Sigui $f(z) = e^{-z} + \sin z - 1$ i $g(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$.

   (a) Calculeu les derivades parcials de $g(x,y)$ en $\mathbb{R}^2$. És $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$?

   (b) Demostreu que existeix $z_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que si $x_0^2 + y_0^2 = z_0^2$, llavors el gradient de $g(x,y)$ s'anul·la en $(x_0, y_0)$.

**Resolució:**

(a) $f'(z) = -e^{-z} + \cos z$

$D_x g = f'(\sqrt{x^2+y^2})\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\quad D_y g = f'(\sqrt{x^2+y^2})\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, si $(x,y) \neq 0$. En $(0,0)$ usem la definició:

$$\begin{aligned} D_x g(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{g(x,0)-g(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(\sqrt{x^2})-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(|x|)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-|x|}+\sin|x|-1}{x} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-|x|+R_2(x)) + (|x|+R_3(|x|)) - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{R_2(x)}{|x|} = 0\,; \end{aligned}$$

Ídem $\quad D_y g(0,0) = 0$.

És clar que $g \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{(0,0)\})$ per generació. Per veure que $g$ és $C^1$ en $(0,0)$ calculem $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} D_x g$ usant coordenades polars $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$:

$$|D_x g(r\cos\theta,\; r\sin\theta) - 0| = |f'(r)\cdot\cos\theta| \leq |f'(r)|\,,$$

on $f'(r) = -e^{-r} + \cos r \to 0$ quan $r \to 0$. Per tant, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} D_x g = 0$. Ídem $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} D_y g = 0$ i $g$ és $C^1(\mathbb{R}^2)$.

(b) Si volem $D_x g(x_0,y_0) = D_y g(x_0,y_0) = 0$ amb $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ cal $f'(\sqrt{x_0^2+y_0^2}) = f'(z_0) = 0$. Clarament $f'(0) = 0$, $f''(z) = e^{-z} - \sin z$, $f''(0) = 1 > 0$ i $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}} < 0$. Per tant $f'$ és creixent en $x = 0$ i per tant positiva si $x > 0$ i petit. Però com que $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0$ llavors té almenys un canvi de signe en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ i, per Bolzano, $f'(z_0) = 0$ per a algun $z_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

3. (7 punts)

   (a) Sigui $f : [1,2] \longrightarrow [1,2]$ derivable amb $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$, $\forall x \in [1,2]$. Demostreu que $f$ té un únic punt fix $s \in [1,2]$, això és, $f(s) = s$.

   (b) Demostreu que $|f(x) - s| \leq \dfrac{1}{2}|x - s|$, $\forall x \in [1,2]$.

(c) Sigui $(x_n)_{x\in\mathbb{N}}$ la successió definida recurrentment per a $x_0 = 1$ i $x_{n+1} = f(x_n)$, si $n \geq 0$. Demostreu, per inducció, que $|x_n - s| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot |1-s|$, $\forall\, n \geq 0$. Quant val $\lim_{n\to\infty} x_n$? (Raoneu la resposta.)

(d) Sigui $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$. Calculeu els extrems absoluts de $f(x)$ i de $f'(x)$ en $[1,2]$ i deduïu que $f(x)$ compleix les hipòtesis de l'apartat (a). Quant val $s$ en aquest cas?

**Resolució:**

(a) $f(s) = s \Longleftrightarrow f(s) - s = 0 \Longleftrightarrow s$ és zero de $g(x) := f(x) - x$.

- Existència de $s$:

$$\left.\begin{array}{l} g(1) = f(1) - 1 \geq 1 - 1 = 0 \\ \\ g(2) = f(2) - 2 \leq 2 - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

Així doncs, o bé $g(1) = 0$ o bé $g(2) = 0$ o bé $g(1) > 0$ i $g(2) < 0$. En aquest darrer cas, per Bolzano $g$ té almenys un zero en $(1,2)$.

- Unicitat de $s$:

Si existeixen $s_1 < s_2$ tals que $g(s_1) = g(s_2) = 0$, llavors pel teorema de Rolle existeix $s_3 \in (s_1, s_2)$ tal que $g'(s_3) = 0$. Però $g'(x) = f'(x) - 1$ no es pot anul·lar ja que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. Per tant $g(x)$ no pot tenir dos zeros diferents.

(b) Pel teorema del valor mig:

$$f(x) - s = f(x) - f(s) = f'(c_x)(x - s)\,,$$

on $c_x$ està entre $x$ i $s$. Així:

$$|f(x) - s| \leq |f'(c_x)| \cdot |x - s| \leq \frac{1}{2}|x - s|\,.$$

(c) • Si $n = 0 \Longrightarrow |x_0 - s| = |1 - s| = \left(\frac{1}{2}\right)^0 |1 - s|$.

- Suposem la desigualtat certa per a un cert $n$i anem a veure que també ho és per a $n+1$

$$|x_{n+1} - s| = |f(x_n) - f(s)| \leq \frac{1}{2}|x_n - s| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - s| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |1 - s|$$

on hem usat l'apartat (b) i la hipòtesi d'inducció $|x_n - s| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - s|$.

Llavors $\lim_{n\to+\infty} |x_n - s| = 0$ ja que $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = s$.

(d) • $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$ i $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

- $f'(x) = 0$ en $[1,2] \Longleftrightarrow x = \sqrt{2}$.
- $f'(x) < 0$ si $x \in [1, \sqrt{2})$ i $f'(x) > 0$ si $x \in (\sqrt{2}, 2]$.
- $f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, $f(1) = \frac{3}{2}$, $f(2) = \frac{3}{2}$.
- $x = 1, 2$ màxims absoluts de $f(x)$ i $x = \sqrt{2}$ mínim absolut.
- $f(x) \in \left[\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right] \subset [1,2]$, $\forall\, x \in [1,2]$.
- $f''(x) > 0$, $\forall\, x \in [1,2] \Longrightarrow x = 1$ mínim absolut i $x = 2$ màxim absolut de $f'(x)$.

- $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$ i $f'(2) = \dfrac{1}{4}$.
- $f'(x) \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right], \ \forall\, x \in [1,2] \Longrightarrow |f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}, \ \forall\, x \in [1,2]$.
- $f(s) = s \Longleftrightarrow \dfrac{s}{2} + \dfrac{1}{s} = s \Longleftrightarrow s^2 = 2$. Així, $s = \sqrt{2}$.