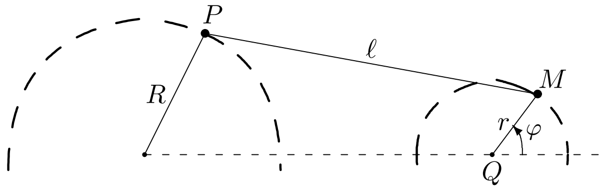
Càlcul Infinitesimal I / Càlcul I **Codi: 21702 / 21762**

Temps: 1 h. 50 minuts 15 de gener de 2010

Problemes

1. (6 punts) El punt $P = (x, y)$ es mou sobre la circumferència de centre $(0, 0)$ i radi R impulsat pel mecanisme de la figura, on el punt M gira sobre la circumferència de radi r entorn del punt $Q = (d, 0)$. Fent $R = \ell = 5$, $d = 7$ i $r = 1$, llavors les coordenades (x, y) i l'angle φ satisfan les equacions:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x(7 + \cos\varphi) + y \cdot \sin\varphi - 7\cos\varphi - 25 = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$



(a) Demostreu que podem aïllar (x, y) com a funció de φ en un entorn del punt $(x, y, \varphi) = (3, 4, \pi/2)$.

(b) Si $x = x(\varphi)$ i $y = y(\varphi)$ són les funcions obtingudes en l'apartat (a), calculeu $D_\varphi x(\pi/2)$ i $D_\varphi y(\pi/2)$.

(c) Suposeu que (x, y, φ) es mouen com a funcions de t, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, verificant les equacions (1) i que $\varphi'(t) = 1$ per a tot $t \in \mathbb{R}$. Demostreu que els valors de (x, y, φ) pels quals la velocitat $x'(t) = y'(t) = 0$, per a algun t, verifiquen la relació $\tan\varphi = \dfrac{y}{x-7}$.

Resolució:

(a) $f_1(x, y, \varphi) = x^2 + y^2 - 25$

$f_2(x, y, \varphi) = x(7 + \cos\varphi) + y\sin\varphi - 7\cos\varphi - 25$

i. $f = (f_1, f_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

ii. $f_1\left(3, 4, \frac{\pi}{2}\right) = 3^2 + 4^2 + 25 = 0$

$f_2\left(3, 4, \frac{\pi}{2}\right) = 3\left(7 + \cos\frac{\pi}{2}\right) + 4\sin\dfrac{\pi}{2} - 7\cos\dfrac{\pi}{2} - 25 = 3 \cdot 7 + 4 - 25 = 0.$

iii. $\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 7 + \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}$

$\det \dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}\left(3, 4, \dfrac{\pi}{2}\right) = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 56 = -50 \neq 0.$

Llavors podem aplicar el teorema de la funció implícita i aïllar $x = x(\varphi)$ i $y = y(\varphi)$ verificant $x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$ i $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4$.

(b) Derivant implícitament (1) respecte de φ, tenim:

$$\begin{array}{l} 2xD_\varphi x + 2yD_\varphi y = 0 \\ D_\varphi x(7 + \cos\varphi) - x\sin\varphi + D_\varphi y\sin\varphi + y\cos\varphi + 7\sin\varphi = 0 \end{array}$$

Fent $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, $x = x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$ i $y = y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4$;

$$\left.\begin{array}{rcr} 3D_\varphi x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + 4D_\varphi y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) &=& 0 \\ 7D_\varphi x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \ D_\varphi y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) &=& -4 \end{array}\right\}$$

d'on: $D_\varphi x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{16}{-25}$; $\quad D_\varphi y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{12}{25}.$

(c) Si suposem $x = x(t)$, $y = t(t)$ i $\varphi = \varphi(t)$ en (1) i derivem respecte de t:

$$2x(t) \cdot x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t) = 0$$
$$x'(t)(7 + \cos\varphi(t)) - x(t)\sin\varphi(t)\varphi'(t) + y'(t)\sin\varphi(t) + y(t)\cos\varphi(t) \cdot \varphi'(t) + 7\sin\varphi(t) \cdot \varphi'(t) = 0$$

Fent $x'(t) = y'(t) = 0$ i $\varphi'(t) = 1$ obtenim que la 1a equació és trivial i la segona:

$$-x(t)\sin\varphi(t) + y(t)\cos\varphi(t) + 7\sin\varphi(t) = 0\,.$$

Dividint per $\cos\varphi(t)$ tenim que (x, y, φ) verifiquen

$$-x\tan\varphi + y + 7\tan\varphi = 0\,,$$

d'on $\tan\varphi = \dfrac{y}{x-7}$.

2. (4 punts) Sigui $f(x) = \dfrac{(x+1)^{x+1}}{(2x+1)x^x}$, definida per $x > 0$.

(a) Sigui $g(x) = \ln(f(x)) = (x+1)\ln(x+1) - x\ln x - \ln(2x+1)$. Calculeu $\lim\limits_{x\to 0^+} g'(x)$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)$.

(b) Calculeu $g''(x)$ i vegeu $g''(x) < 0$ si $x > 0$. (*Indicació:* Expresseu $g''(x)$ en termes d'un denominador comú.) Useu aquest fet juntament amb l'apartat (a) per demostrar que $g'(x) > 0$ si $x > 0$.

(c) Deduïu que $f(x)$ és una funció estrictament creixent.

Resolució:

(a) $g'(x) = \ln(x+1) + (x+1)\dfrac{1}{x+1} - \ln x - x\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{2x+1} = \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{2}{2x+1} = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{2}{2x+1}$

$\lim\limits_{0^+} g'(x) = +\infty$ ja que $\lim\limits_{0^+} \dfrac{x+1}{x} = +\infty$; $\quad \lim\limits_{+\infty} g'(x) = \ln(1) - 0 = 0.$

(b) $$g''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{4}{(2x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{4}{(2x+1)^2} = \frac{-(2x+1)^2 + 4x(x+1)}{x(x+1)(2x+1)^2} =$$
$$= \frac{-(4x^2+4x+1) + 4x^2 + 4x}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)(2x+1)^2} < 0.$$

És clar que $g'' < 0$ implica g' estrictament decreixent. Com que $\lim\limits_{+\infty} g' = 0$, això vol dir $g'(x) > 0$ si $x > 0$.

(c) $f(x) = e^{g(x)}$ i $f'(x) = e^{g(x)}g'(x) > 0$ si $x > 0$. Per tant, f és estrictament creixent.

3. (9 punts) Sigui $f(x,y) = \left(\dfrac{1+y}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+y)^{\frac{1}{2}}$

(a) Calculeu el polinomi de Taylor de grau 2 de f entorn $(0,0)$.

(b) Sigui $g(x,y) = \dfrac{ax^2+by^2}{x^2+y^2}$, on $a, b \in \mathbb{R}$ són paràmetres. Calculeu tots els valors dels límits de $g(x,y)$ en l'origen segons rectes que passen pel $(0,0)$ i vegeu que només si $a = b$ el límit no depèn de la recta triada.

(c) Vegeu que hi ha un únic valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ pel qual existeix el límit $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{f(x,y) - 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}xy + \lambda y^2}{x^2+y^2}$ i calculeu-lo. (*Indicació:* Useu (a) i (b)).

(d) Sigui R el rectangle $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2} \le y \le \dfrac{1}{2}\right\}$ i $f(x,y) = P_1(x,y) + R_2(x,y)$, on P_1 és el polinomi de Taylor de grau 1 de f i R_2 el corresponent residu. Sabent que: $|D_{xx}f(x,y)|,\ |D_{yy}f(x,y)|,\ |D_{xy}f(x,y)| \le 3\sqrt{3},\ \ \forall\,(x,y) \in R$, acoteu el tamany el residu, $|R_2(x,y)|$, $\forall\,(x,y) \in R$.

(e) Demostreu que el punt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\dfrac{1+y}{1-x} = 2$ i que fa mínim el valor de $H(x,y) = x^2 + y^2$ és $(x,y) = \left(\dfrac{4}{10}, \dfrac{2}{10}\right)$. (*Indicació:* Relacioneu $H(x,y)$ amb $h(x) = x^2 + (1-2x)^2$.)

(f) Useu el punt (x,y) de l'apartat (e) i el polinomi de Taylor de grau 1 de f per calcular una aproximació de $\sqrt{2}$ i acoteu l'error comés. (Feu totes les operacions en termes de fraccions racionals.)

Resolució:

(a) $f(x,y) = \left(1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}(-x) + \binom{-\frac{1}{2}}{2}(-x)^2 + R_3(x)\right) \cdot \left(1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}y + \binom{\frac{1}{2}}{2}y^2 + R_3(y)\right) =$

$= \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + R_3(x)\right)\left(1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + R_3(y)\right) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{4}xy - \frac{1}{8}y^2 + R_3(x,y)$

(b) $y = mx,\ \ m \in \mathbb{R}$: $\lim_{x\to 0} g(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{ax^2 + bm^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{a + bm^2}{1 + m^2}$

$x = 0$; $\lim_{y\to 0} g(0, y) = \lim_{y\to 0} \frac{by^2}{y^2} = b.$

Si fem $m = 0$ llavors el límit és a i per tant si $a \neq b$ els límits no són tots iguals. En el cas $a = b$, tots els límits donen a.

(c) $\lim_{(0,0)} \frac{f(x,y) - 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}xy + \lambda y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(0,0)} \frac{\frac{3}{8}x^2 + \left(\lambda - \frac{1}{8}\right)y^2 + R_3(x,y)}{x^2 + y^2} = \lim_{(0,0)} \frac{\frac{3}{8}x^2 + \left(\lambda - \frac{1}{8}\right)y^2}{x^2 + y^2}$

Ja que $\lim_{(0,0)} \frac{R_3(x,y)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2} = 0$. Llavors per l'apartat (b) aquest límit només pot existir si $\frac{3}{8} = \lambda - \frac{1}{8} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$, i llavors val $\frac{3}{8}$.

(d) Sabem que $M_2 = 3\sqrt{3}$ acota el tamany de les derivades parcials segones de f en el rectangle R. Llavors podem acotar el residu per:

$$|R_2(x,y)| \leq \frac{M_2}{2!}(|x| + |y|)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}(|x| + |y|)^2 .$$

(e) $\frac{1 + y}{1 - x} = 2 \iff y = 1 - 2x$ i per tant $H(x,y) = h(x)$. Fent $h'(x) = 2x - 4(1 - 2x) = 10x - 4 \iff x = \frac{4}{10}$, que és el vèrtex de la paràbola i per tant mínim absolut. Llavors $y = 1 - 2x = 1 - 2\frac{4}{10} = \frac{2}{10}$.

(f) Si $(x,y) = \left(\frac{4}{10}, \frac{2}{10}\right)$, llavors $\left(\frac{1 + y}{1 - x}\right) = 2$ i per tant $f\left(\frac{4}{10}, \frac{2}{10}\right) = \sqrt{2}$. És clar que $P_1(x,y) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ i per tant $P_1\left(\frac{4}{10}, \frac{2}{10}\right) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} = \frac{13}{10}$ és una aproximació de $\sqrt{2}$ amb un error

$$\left|R_3\left(\frac{4}{10}, \frac{2}{10}\right)\right| \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{4}{10} + \frac{2}{10}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9}{25} = \frac{27\sqrt{3}}{50} .$$