Càlcul Infinitesimal I / Càlcul I — **Codi: 21702 / 21762**

Temps: 2 hores — **16 de Gener de 2006**

Problemes

1. (6 punts) Donada la funció $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \dfrac{1-x}{3}e^x$

   (a) Feu la seva gràfica aproximada en $[0,1]$.

   (b) Vegeu que $\forall\, x \in [0,1]$ es verifica que $0 \le f(x) \le 1/3$.

   (c) Proveu que existeix un únic punt fix "a" de f en $[0,1]$, és a dir, que l'equació $f(x) = x$ té una única solució $a \in [0,1]$.
   (*Indicació:* busqueu zeros de la funció $g(x) = f(x) - x$.)

   (d) Proveu que $\forall\, x \in [0,1]$, $|f'(x)| \le \dfrac{e}{3}$.

   (e) Proveu que $\forall\, x \in [0,1]$ es verifica $|f(x) - a| \le \dfrac{e}{3}|x-a|$, on a és el punt fix trobat a (c).

   (f) Es considera la successió definida per $u_0 = 0$ i $u_n = f(u_{n-1})$, si $n \ge 1$; vegeu per inducció, que $0 \le u_n \le \dfrac{1}{3}$ i que $|u_n - a| \le \left(\dfrac{e}{3}\right)^n |a|$.

   (g) Digueu si la successió definida a (f) és convergent i, en cas de ser-ho, digueu quin és el seu límit.

Resolució:

(a) $D = [0,1]$; $f(1) = 0$, $f(0) = 1/3$; $f'(x) = \dfrac{1-x}{3}e^x - \dfrac{1}{3}e^x = -\dfrac{x}{3}e^x \le 0$, $\forall\, x \in [0,1]$; f és decreixent entre $[0,1]$; $f''(x) = -\dfrac{x}{3}e^x - \dfrac{1}{3}e^x = -\dfrac{x+1}{3}e^x < 0$, còncava.

(b) Com f és decreixent, $f(0) \ge f(x) \ge f(1)$; $\dfrac{1}{3} \ge f(x) \ge 0$.

(c) $g(x) = f(x) - x = \dfrac{1-x}{3}e^x - x$; C^∞

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = 1/3 \\ g(1) = -1 \end{array}\right\} \quad T \text{ Bolzano };\ \exists\, a \in [0,1); \quad g(a) = 0 \Rightarrow f(a) = a$$

$g'(x) = f'(x) - 1 = -\dfrac{x}{3}e^x - 1 < 0$, $\forall\, x \in [0,1] \Rightarrow g'$ no s'annul·la mai(g és estricament decreixent) $\Rightarrow$ a únic.

(d) $f'(x) = -\dfrac{x}{3}e^x \Rightarrow |f'(x)| = \dfrac{x}{3}e^x \le \dfrac{1}{3}e^x \le \dfrac{e}{3}$.

(e) Pel teorema del valor mig, $f(x) - f(a) = f'(c_x)(x-a)$,

$$|f(x) - a| = |f'(c_x)|\,|x-a| \le \frac{e}{3}|x-a|\,.$$

(f) $u_0 = 0$; $u_n = f(u_{n-1})$, $n \ge 1$; $0 \le u_n \le \dfrac{1}{3}$; $|u_n - a| \le \left(\dfrac{e}{3}\right)^n |a|$.
Demostrem per inducció: $n = 1$, $0 \le u_1 \le 1/3$; $0 \le f(0) \le 1/3$: cert.

$$|u_1 - a| = |f(0) - a| \le e/3|a| \quad \text{cert},$$

cert per a n
$n+1, \quad u_{n+1} = f(u_n)$, per l'apartat (b); $0 \le f(u_n) \le 1/3$

$$|u_{n+1} - a| = |f(u_n) - a| \le e/3|u_n - a| \le \left(\frac{e}{3}\right)^{n+1} |a|$$

(g) u_n és convergent perquè $0 \le |u_n - a| \le \left(\frac{e}{3}\right)^n a$ i $\lim \left(\frac{e}{3}\right)^n a = 0$. Pel lema de l'entrepà, $u_n - a \longrightarrow 0 \Rightarrow u_n \to a$.

2. (7 punts)

(a) Considereu l'equació $y + (1-x^2)\sin y + \lambda x^3 = 0$, on $\lambda \in \mathbb{R}$ és un paràmetre. Determineu per a quins valors de λ aquesta equació defineix, localment a l'origen, y com a funció implícita de x de classe C^∞.

(b) Per als valors de λ determinats a l'apartat anterior, sigui $y = \varphi_\lambda(x)$ aquesta funció implícita. Proveu que el desenvolupament de Taylor de $\varphi_\lambda(x)$ al voltant de $x = 0$ és $\varphi_\lambda(x) = -\frac{\lambda}{2}x^3 - \frac{\lambda}{4}x^5 + O(x^6)$.

(c) Busqueu λ per tal que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\varphi_\lambda(x) - x^2 \sin x}{x^5}$ sigui diferent de zero i de ∞.

(d) Sigui λ_0 el valor de λ calculat a (c). Definim la funció $h(x) = x + \varphi_{\lambda_0}(x)$. Discutiu si h és invertible en un entorn de $x = 0$ i, en cas afirmatiu, trobeu $D^3 h^{-1}(0)$.

Resolució:

(a) $$\left.\begin{array}{l} f(0,0) = 0, \ \forall \lambda \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \Big(1 + (1-x^2)\cos y\Big)_{(0,0)} = 2 \neq 0, \ \forall \lambda \end{array}\right\} \text{teorema funció implícita}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, y és funció de x en un entorn de $(0,0)$; $y = \varphi_\lambda(x)$, $\varphi_\lambda(0) = 0$.

(b) $y = \varphi_\lambda(x)$; suposem $\varphi_\lambda(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \mathcal{O}(x^6)$ (ja sabem $a_0 = 0$). Sabem que $\forall x$, $\varphi_\lambda(x) + (1-x^2)\sin\varphi_\lambda(x) + \lambda x^3 = 0$. Per tant, desenvolupant per Taylor: $a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + (1-x^2)\sin(a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_5x^5) + \lambda x^3 + \mathcal{O}(x^6) = 0$, $\forall x$.
Usem que $\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \mathcal{O}(z^6)$ i notem que:
$(a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_5x^5)^2 = a_1^2x^2 + a_2^2x^4 + 2a_1a_2x^3 + 2a_1a_3x^4 + 2a_1a_4x^5 + 2a_2a_3x^5 + \mathcal{O}(x^6) = a_1^2x^2 + 2a_1a_2x^3 + (a_2^2 + 2a_1a_3)x^4 + (2a_1a_4 + 2a_2a_3)x^5 + \mathcal{O}_6$
i que
$(a_1x + \cdots + a_5x^5)^3 = a_1^3x^3 + 3a_1^2a_2x^4 + a_1(a_2^2 + 2a_1a_3)x^5 + 2a_2^2a_1x^5 + a_3a_1^2x^5 + \mathcal{O}_6$,
i que
$(a_1x + \cdots + a_5x^5)^5 = a_1^5x^5 + \mathcal{O}(x^6)$.
Per tant,
$\varphi_\lambda(x) + (1-x^2)\sin\varphi_\lambda(x) + \lambda x^3 = \varphi_\lambda(x) + \sin\varphi_\lambda(x) - x^2\sin\varphi_\lambda(x) + \lambda x^3 = 2(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5) - \frac{1}{3!}(a_1^3x^3 + 3a_1^2a_2x^4 + (a_1(a_2^2 + 2a_1a_3) + 2a_2^2a_1 + a_3a_1^2)x^5) + \frac{1}{5!}a_1^5x^5 + \mathcal{O}(x^6) - a_1x^3 - a_2x^4 - a_3x^5 + \frac{1}{3!}(a_1^3x^5) + \lambda x^3 = 0.$

Agrupant els termes del mateix grau:

$$2a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$2a_3 - \frac{1}{3!}a_1^3 - a_1 + \lambda = 0 \Rightarrow a_3 = -\lambda/2$$

$$2a_4 - \frac{1}{3!}3a_1^2a_2 - a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = 0$$

$$2a_5 - \frac{1}{3!}(a_1(a_2^2 + 2a_1a_3) + 2a_2^2a_1 + a_3a_1^2) + \frac{1}{5!}a_1^5 - a_3 + \frac{a_1^3}{3!} = 0 \Rightarrow a_5 = \frac{a_3}{2} = -\lambda/4$$

Per tant, $\varphi_\lambda(x) = -\frac{\lambda}{2}x^3 - \frac{\lambda}{4}x^5 + \mathcal{O}(x^6)$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varphi_\lambda(x) - x^2\sin x}{x^5} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-(\lambda/2)x^3 - (\lambda/4)x^5 - x^3 + (x^5/6) + \mathcal{O}_6}{x^5}$; si volem que el límit sigui finit cal: $-\frac{\lambda}{2} - 1 = 0$, $\lambda = -2$; $-\frac{\lambda}{4} + \frac{1}{6} \neq 0$, que és cert per a $\lambda = -2$; aleshores $\lim\limits_{x\to 0} = -\frac{\lambda}{4} + \frac{1}{6} = \frac{2}{4} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

(d) $\lambda_0 = -2$; $h(x) = x + \varphi_{-2}(x)$. Com sabem que $\varphi_{-2}(x) = x^3 + \frac{x^5}{2} + \mathcal{O}(x^6)$, $h'(0) = 1$, llavors, h és invertible en un entorn de 0. Sabem que
$h(x) = x + x^3 + \mathcal{O}(x^4)$
$h^{-1}(x) = b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \mathcal{O}(x^4)$
$h^{-1}(h(x)) = x$
$b_1(x + x^3) + b_2(x + x^3)^2 + b_3(x + x^3)^3 + \mathcal{O}(x^4) = x$
$b_1x + b_2x^2 + (b_1 + b_3)x^3 + \mathcal{O}(x^4) = x$
$b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = -1 \Rightarrow\ D^3h^{-1}(0) = -3! = -6$.

3. (7 punts) Considerem el següent sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{l} u = y + e^{x-y} - e^{y-x} \\ v = x - e^{x-y} + e^{y-x} \end{array}\right\} \qquad (*)$$

(a) Demostreu que el sistema $(*)$ defineix $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$ en un entorn de $(0,0)$ tal que $f(0,0) = g(0,0) = 0$.

(b) Sigui la funció $S(x,y) = -xy - e^{x-y} - e^{y-x}$. Demostreu que té un màxim relatiu en $(0,0)$.

(c) Siguin $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ fixats i considerem la funció $S(x,y) = u_0x + v_0y - xy - e^{x-y} - e^{y-x}$. Si suposem que $x_0 = f(u_0,v_0)$ i $y_0 = g(u_0,v_0)$ estan ben definits, demostreu que $S(x,y)$ té un màxim relatiu en (x_0,y_0).

Resolució:

(a) Podem usar el teorema de la funció inversa

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & (y + e^{x-y} - e^{y-x},\ x - e^{x-y} + e^{y-x}) \end{array}$$

$F(0,0) = (0,0)$

$$\det DF(0,0) = \begin{vmatrix} e^{x-y} + e^{y-x} & 1 - e^{x-y} - e^{y-x} \\ 1 - e^{x-y} - e^{y-x} & e^{x-y} + e^{y-x} \end{vmatrix}(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$\exists\, U$ entorn de $(0,0)$, $f_{|U} : U \longrightarrow f(U)$ és invertible. La inversa $(x,y) = F^{-1}(u,v) = (f(u,v), g(u,v))$.

(b) $S(x,y) = -xy - e^{x-y} - e^{y-x}$

$$\begin{array}{ll}
\partial_x S(x,y) = -y - e^{x-y} + e^{y-x} & \partial_x S(0,0) = 0 \\
\partial_y S(x,y) = -x + e^{x-y} - e^{y-x} & \partial_y S(0,0) = 0 \\
\partial_{xx} S(x,y) = -e^{x-y} - e^{y-x} & \\
\partial_{xy} S(x,y) = -1 + e^{x-y} + e^{y-x} = \partial_{yx} S(x,y) & \\
\partial_{yy} S(x,y) = -e^{x-y} - e^{y-x} &
\end{array}$$

$$H_S(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \det = 3 > 0 \\ \text{traça} = -4 < 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \text{màxim relatiu en } (0,0).$$

(c) u_0, v_0 fixats; $S(x,y) = u_0 x + v_0 y - xy - e^{x-y} - e^{y-x}$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = f(u_0,v_0) \\ y_0 = g(u_0,v_0) \end{array}\right\} \text{això vol dir que } (x_0,y_0,u_0,v_0) \text{ verifiquen } (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial S}{\partial x}(x_0,y_0) = u_0 - y_0 - e^{x_0-y_0} + e^{y_0-x_0} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial y}(x_0,y_0) = v_0 - x_0 + e^{x_0-y_0} - e^{y_0-x_0} = 0 \end{array}\right\} (x_0,y_0) \text{ candidat a extrem}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -e^{x_0-y_0} - e^{y_0-x_0};\ \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = -e^{x_0-y_0} - e^{y_0-x_0};\ \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} = -1 + e^{x_0-y_0} + e^{y_0-x_0}.$$

Per tant, $H_S(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} -e^{x_0-y_0} - e^{y_0-x_0} & -1 + e^{x_0-y_0} + e^{y_0-x_0} \\ -1 + e^{x_0-y_0} + e^{y_0-x_0} & -e^{x_0-y_0} - e^{y_0-x_0} \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} \det H &= (e^{x_0-y_0} + e^{y_0-x_0})^2 - (-1 + e^{x_0-y_0} + e^{y_0-x_0})^2 = \\ &= \big[2(e^{x_0-y_0} + e^{y_0-x_0}) - 1\big] = 2\cosh(x_0 - y_0) - 1 > 0\,; \end{aligned}$$

traça $= -2\Big(e^{x_0-y_0} + e^{y_0-x_0}\Big) < 0$; (x_0,y_0) és un màxim.