

### Problemes

1. (8 punts) Un asteroide gira entorn del sol seguint una trajectòria el·líptica amb el Sol en un dels seus focus. En unitats adequades el moviment de l'asteroide està determinat per les següents relacions:

$$t = E - e \sin E \quad (1)$$

$$r = 1 - e \cos E \quad (2)$$

on  $t$  és el temps,  $r$  la distància al Sol,  $e \in [0, 1)$  l'excentricitat de l'el·lipse i  $E$  l'anomenada anomalia vertadera

- (a) Demostreu que mitjançant les equacions (1) i (2) podem expressar  $(e, E)$  com a funció de  $(t, r)$  entorn del punt  $(e, E) = (0, 0)$ .
- (b) Si ens fixem només en l'equació (1), demostreu que podem expressar  $E$  com a funció de  $(t, e)$  entorn del punt  $(t, e, E) = (0, 0, 0)$  i calculeu el desenvolupament de Taylor, fins a termes de grau 2 inclosos, de la funció  $E(t, e)$  obtinguda.
- (c) Si assumim que  $e$  és constant com a funció del temps i que  $r = r(t)$  i  $E = E(t)$  són funció del temps, deduïu de (1) i (2) que la velocitat radial  $u = \frac{d}{dt}r$  ve donada per l'expressió:  

$$u^2 = \frac{1}{r^2}(e^2 - (1 - r)^2).$$
- (d) Si denotem per  $f(r) = \frac{1}{r^2}(e^2 - (1 - r)^2)$ , trobeu per a quin valor de  $r \in [1 - e, 1 + e]$  la funció assoleix el seu valor màxim (que es correspon amb el valor màxim de la velocitat radial).

### Resolució:

(a)  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(e, E) \longmapsto f(e, E) = (E - e \sin E, 1 - e \cos E).$$

Apliquem el teorema de la funció inversa  $f$  entorn  $(e, E) = (0, 0)$

(i)  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

(ii)  $Df(e, E) = \begin{pmatrix} -\sin E & 1 - e \cos E \\ -\cos E & e \sin E \end{pmatrix}$ ;  $\det Df(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ .

Per tant existeix  $f^{-1}$  inversa de  $f$  definida entorn del punt  $f(0, 0) = (0, 1)$  i podem expressar  $(e, E) = f^{-1}(t, r)$  entorn d'aquest punt.

(El mateix resultat el podem obtenir també usant el teorema de la funció implícita.)

- (b)  $g(t, e, E) = t - E + e \sin E$ . Apliquem el teorema de la funció implícita

(i)  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

(ii)  $g(0, 0, 0) = 0$ .

(iii)  $D_E g(t, e, E) = -1 + e \cos E$ ;  $D_E g(0, 0, 0) = -1 \neq 0$

Així doncs, podem aïllar  $E = E(t, e)$  solució de  $g(t, e, E) = 0$  verificant

(I)  $E(t, e) \in C^\infty$ .

(II)  $E(0, 0) = 0$ .

(III)  $E = E(t, e)$  resol l'equació  $g(t, e, E) = 0$  entorn del punt  $(0, 0, 0)$ .

Desenvolupem per Taylor:  $E(t, e) = a_1 t + a_2 e + a_3 t^2 + a_4 t e + a_5 e^2 + R_3(t, e)$  verifica  $t = E(t, e) - e \sin(E(t, e))$ .

Usant  $\sin(E(t, e)) = E(t, e) - \frac{E(t, e)^3}{3!} + \dots = a_1 t + a_2 e + R_2(t, e)$ , d'on

$$t = a_1 t + a_2 e + a_3 t^2 + a_4 t e + a_5 e^2 - e(a_1 t + a_2 e) + R_3(t, e).$$

Així,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = 0$ ,  $a_4 = 1$ ,  $a_5 = 0$  i  $E(t, e) = t + t \cdot e + R_3(t, e)$ .

(c) Derivem (1) i (2) respecte del temps  $t$ :

$$1 = \frac{d}{dt} E - e \cos E \frac{dE}{dt} \implies \frac{dE}{dt} = \frac{1}{1 - e \cos E}; \quad \frac{dr}{dt} = e \sin E \frac{dE}{dt} = \frac{e \sin E}{1 - e \cos E}$$

Així, si usem (2) tenim:  $r = 1 - e \cos E \implies \cos E = \frac{1-r}{e} \implies \sin^2 E = 1 - \cos^2 E = 1 - \left(\frac{1-r}{e}\right)^2$ , d'on

$$u^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{e^2 \sin^2 E}{(1 - e \cos E)^2} = \frac{e^2}{r^2} \left[1 - \left(\frac{1-r}{e}\right)^2\right] = \frac{1}{r^2} [e^2 - (1-r)^2]$$

$$(d) f(1-e) = \frac{1}{(1-e)^2} [e^2 - (1-1+e)^2] = 0$$

$$f(1+e) = \frac{1}{(1+e)^2} [e^2 - (1-1-e)^2] = 0$$

$$f'(r) = \frac{-2}{r^3} (e^2 - (1-r)^2) + \frac{2}{r^2} (1-r).$$

Així,

$$f'(r) = 0 \iff -e^2 + (1-r)^2 + r(1-r) = 0 \iff r = 1 - e^2 \in [1-e, 1+e], \text{ ja que } e \in [0, 1).$$

Com que per construcció  $f(r) \geq 0$  i  $f(r) = 0$  en els extrems de l'interval, ha de tenir el seu màxim absolut en  $r = 1 - e^2$ .

2. (3 punts) Sigui  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funció  $C^\infty$  tal que  $f(0) = 0$ . Construïm a partir de  $f$  una nova funció  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida per  $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ c, & \text{si } x = 0 \end{cases}$ , essent  $c \in \mathbb{R}$ . Denotem  $a = f'(0)$  i  $b = f''(0)$ .

(a) Quant ha de valer  $c$ , en funció de  $a$  i  $b$ , per tal que  $g$  sigui contínua en  $x = 0$ ?

(b) Calculeu la funció  $g'(x)$  per a tot  $x \in \mathbb{R}$  i digueu si  $g$  és  $C^1$  en  $x = 0$ .

**Resolució:**

(a) Desenvolupem  $f(x)$  per Taylor en  $x = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + R_3(x) = ax + \frac{b}{2} x^2 + R_3(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + (b/2)x^2 + R_3(x)}{x} = a \implies \text{cal triar } c = a.$$

(b)  $g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$  si  $x \neq 0$ . En  $x = 0$  usem la definició:

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} - a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(b/2)x^2 + R_3(x)}{x^2} = \frac{b}{2}.$$

Calculem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[a + bx + R_2(x)]x - [ax + (b/2)x^2 + R_3(x)]}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(b/2)x^2 + R_2(x)}{x^2} = \frac{b}{2} = g'(0). \end{aligned}$$

Per tant,  $g$  és  $C'$  en  $x = 0$ .

3. (8 punts)

(a) Donades les funcions  $f_1(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^4}$  i  $f_2(x, y) = \frac{y^3}{x^2 + y^4}$ , calculeu els seus límits en el  $(0, 0)$  segons rectes que passen per l'origen. Pot ser que alguna de les funcions tingui límit en  $(0, 0)$ ? Si és així, quin és el possible valor del límit?

(b) Sigui  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  i tal que  $|x| \leq 1$  i  $|y| \leq 1$ . Trobeu  $M > 0$  tal que  $\frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^4} \leq M$ .

(c) Sigui  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funció  $C^\infty$  i escrivim  $f(x, y) = P_4(x, y) + R_5(x, y)$ , on  $P_4(x, y)$  és el polinomi de Taylor de grau 4 de  $f$  en  $(0, 0)$ . Demostreu que  $\lim_{(0,0)} \frac{R_5(x, y)}{x^2 + y^4} = 0$

(Indicació: useu (b)).

(d) Sigui  $f(x, y) = \sin(y + x^2) - \ln(1 + xy) - y + xy$ . Calculeu el seu polinomi de Taylor de grau 4 en  $(0, 0)$ .

(e) Digueu per a quins valors de  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tenim

$$\lim_{(0,0)} \frac{f(x, y) + \alpha x^2 + \beta y^3}{x^2 + y^4} = 0.$$

**Resolució:**

(a) •  $y = mx$ ,  $m \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_1(x, mx) &= \frac{x^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{1}{1 + m^4 x^2} \rightarrow 1 \quad \text{si } x \rightarrow 0 \\ f_2(x, mx) &= \frac{(mx)^3}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^3 x}{1 + m^4 x^2} \rightarrow 0 \quad \text{si } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

•  $x = 0$

$$f_1(0, y) = \frac{0^2}{0^2 + y^4} = \frac{0}{y^4} = 0 \rightarrow 0 \quad \text{si } y \rightarrow 0$$

$$f_2(0, y) = \frac{y^3}{0^2 + y^4} = \frac{1}{y} \quad \text{no té límit quan } y \rightarrow 0$$

Per tant, ni  $f_1$  ni  $f_2$  podem tenir límit en  $(0, 0)$  ja que els límits per rectes no són coincidents ni per a  $f_1$  ni per a  $f_2$ .

(b)  $0 < \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^4} = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^4} = \frac{x^2}{x^2 + y^4}(x^2 + 2y^2) + \frac{y^4}{x^2 + y^4} \leq 4$ , on usem  $\frac{x^2}{x^2 + y^4} \leq 1$ ,  $\frac{y^4}{x^2 + y^4} \leq 1$  i  $x^2 + 2y^2 \leq 3$  si  $|x| \leq 1$ ,  $|y| \leq 1$ .

- (c) Sabem que, per les propietats del residu del desenvolupament de Taylor,  $\lim_{(0,0)} \frac{R_5(x, y)}{(x^2 + y^2)^2} = 0$ .

Llavors,

$$\lim_{(0,0)} \frac{R_5(x, y)}{x^2 + y^4} = \lim_{(0,0)} \frac{R_5(x, y)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^4} = 0,$$

on usem que el límit d'una funció que tendeix a zero per una acotada és zero.

- (d)  $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + R_5(z)$

$$\sin(y + x^2) = y + x^2 - \frac{(y + x^2)^3}{3!} + R_5(x, y) = y + x^2 - \frac{(y^3 + 3y^2x^2)}{6} + R_5(x, y)$$

$$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + R_3(z)$$

$$\ln(1 + xy) = xy - \frac{x^2y^2}{2} + R_5(x, y)$$

$$f(x, y) = \sin(y + x^2) - \ln(1 + xy) - y + xy = x^2 - \frac{y^3}{6} + R_5(x, y).$$

- (e)  $\lim_{(0,0)} \frac{f(x, y) + \alpha x^2 + \beta y^3}{x^2 + y^4} = \lim_{(0,0)} \frac{(1 + \alpha)x^2 + \left(\beta - \frac{1}{6}\right)y^3}{x^2 + y^4}$ , on usem l'apartat (d) per eliminar  $\frac{R_5(x, y)}{x^2 + y^4}$ . Per l'apartat (a) sabem que ni  $\lim_{(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^4}$  ni  $\lim_{(0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^4}$  existeixen i per tant si volem que el límit sigui zero cal que  $1 + \alpha = 0$  i  $\beta - \frac{1}{6} = 0$ , això és  $\alpha = -1$ ,  $\beta = \frac{1}{6}$ .