Càlcul I (E. Química) — Codi: 21762

Temps: 2 h. 30 min. — **19 de juny de 2006**

Problemes

1. *(7 punts)* Una partícula de massa 1 a $\mathbb{R}^2$ es troba unida a dues molles fixades als punts $p_1 = (0,0)$ i $p_2 = (3,0)$. La partícula és atreta cap a cadascun dels punts amb una força proporcional a la distància que la separa de cada punt, i suposarem que en cas del punt p_1 aquesta força és el doble que per al punt p_2. Així, la suma de forces que actuen sobre la partícula quan es troba en el punt (x,y) ve donada pel vector $F(x,y) = (-2x,-2y) + (-(x-3),-y)$.

   (a) La partícula es troba en equilibri quan la suma de forces que actuen sobre ella és zero. Quin punt de $\mathbb{R}^2$ constitueix una posició d'equilibri? Comproveu que aquest punt és el mínim de l'energia potencial $\mathcal{U}(x,y) = (x^2+y^2) + \frac{1}{2}((x-3)^2+y^2)$.

   (b) Suposem que, degut a cert mecanisme, la partícula no pot sortir del triangle de vèrtexs $(2,2)$, $(2,-1)$, $(3,-1)$. Trobeu la posició d'equilibri en aquest cas (heu de minimitzar l'energia potencial sobre el triangle).

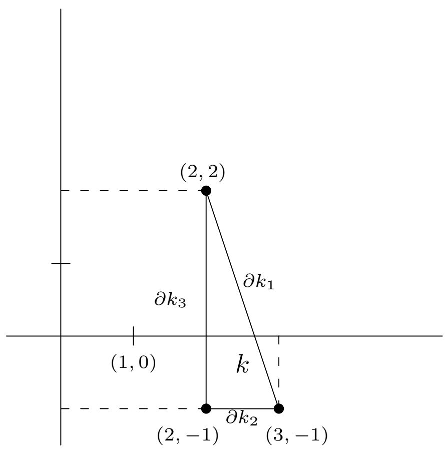
   (c) Al llarg de la seva trajectòria $(x(t),y(t))$, l'acceleració de la partícula (de massa 1) ve donada per $(x'',y'') = F(x,y)$. Si quan $t=0$ la partícula es troba al punt $(2,1)$ i parteix del repòs, trobeu el desenvolupament de Taylor de la funció $h(t) = x(t)^2 + y(t)^2$ en $t=0$ fins a ordre 3. Deduïu-ne si inicialment la distància a l'origen creix o decreix.

Resolució: $F(x,y) = (-2x,-2y) + (-(x-3),-y) = (-3x+3,\,-3y)$

(a) $F(x,y) = (0,0)$; $\quad (-3x+3,\,-3y) = (0,0) \Longrightarrow x=1,\ y=0,\quad (1,0)$ posició d'equilibri.
$u(x,y) = x^2+y^2+\frac{1}{2}((x-3)^2+y^2)$.
Mínims:

$$\left.\begin{array}{ll} D_x u(x,y) = 2x+(x-3)=0\,, & x=1 \\ D_y u(x,y) = 2y+y=0\,, & y=0 \end{array}\right\}\quad (1,0)\ \text{candidat a extrem}$$

$H_u(1,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $\quad (1,0)$ és mínim relatiu.
Donat que $u(x,y) \to \infty$ quan $\|(x,y)\| \to \infty$ i que $(1,0)$ és l'únic mínim relatiu, tenim que és mínim absolut.



(b) u no té mínim relatius a $\overset{\circ}{k}$

- ∂k_1

∂k_1 ve donada per $y-2=\dfrac{-1-2}{3-2}(x-2)$; $y-2=-3(x-2)$; $y=-3x+8$; $x\in[2,3]$

$$\begin{aligned} g_1(x) &= u(x,\,-3x+8)=x^2+(-3x+8)^2+\frac{1}{2}((x-3)^2+(-3x+8)^2)\\ g_1'(x) &= 2x+2(-3x+8)(-3)+(x-3)+(-3x+8)(-3)=\\ &= 2x+18x-48+x-3+9x-24=30x-75=0 \end{aligned}$$

$$x=\frac{75}{30}=\frac{5}{2}, \qquad \text{candidat } \left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$y=-3\left(\frac{5}{2}\right)+8=\frac{-15+16}{2}=\frac{1}{2}, \qquad \text{candidats } (2,2)\ (3,-1).$$

- ∂k_2

∂k_2 ve donada per $y=-1$; $x\in[2,3]$

$$\begin{aligned} g_2(x) &= u(x,\,-1)=x^2+1+\frac{1}{2}((x-3)^2+1)\\ g_2'(x) &= 2x+(x-3)=0\Longrightarrow x=1\notin[2,3] \end{aligned}$$

candidats $(2,-1)$ $(3,-1)$.

- ∂k_3

∂k_3 ve donada per $x=2$; $y\in[-1,2]$

$$\begin{aligned} g_3(y) &= u(2,\,y)=4+y^2+\frac{1}{2}(1+y^2)\\ g_3'(y) &= 2y+y=0\Longrightarrow y=0 \end{aligned}$$

candidats $(2,0)$ i $(2,2)$ $(2,-1)$.

Per tant, possible mínim és $\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$, $(2,2)$, $(3,-1)$, $(2,-1)$, $(2,0)$. Avaluem $u(x,y)$:

$$\begin{aligned} u\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) &= \frac{25}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{5}{2}-3\right)^2+\frac{1}{4}\right)=\frac{26}{4}+\frac{1}{4}=\frac{27}{4}\\ u(2,2) &= 4+4+\frac{1}{2}((2-3)^2+4)=8+\frac{5}{2}=\frac{21}{2}\\ u(3,-1) &= 9+1+\frac{1}{2}(0^2+1)=10+\frac{1}{2}=\frac{21}{2}\\ u(2,-1) &= 4+1+\frac{1}{2}(1+1)=6 \qquad u(2,0)=4+\frac{1}{2}(1^2)=\frac{9}{2} \end{aligned}$$

Aleshores $(2,0)$ és mínim absolut sobre k.

(c) $x(0)=2,\quad y(0)=1;\qquad x'(0)=0,\quad y'(0)=0$

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2xx'+2yy'\\ h''(t) &= 2xx''+2x'x'+2yy''+2y'y'=2xx''+2(x')^2+2(y')^2+2yy''\\ h'''(t) &= 2xx'''+2x'x''+4x'x''+4y'y''+2yy'''+2y'y''=2xx'''+6x'x''+6y'y''+2yy''' \end{aligned}$$

Per tal de saber x'', y'', x''', y''' usem $(x'',y'')=F(x,y)$, és a dir, $(x'',y'')=(-3x+3,\,-3y)$

$$\left.\begin{array}{l} x''=-3x+3\\ y''=-3y \end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x''(0)=-3\cdot2+3=-3\\ y''(0)=-3\cdot1=-3 \end{array}\right.$$

Aleshores,

$$\left.\begin{array}{l} x'''=-3x'\\ y'''=-3y' \end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x'''(0)=0\\ y'''(0)=0 \end{array}\right.$$

Per tant, tenim:

$$\begin{aligned} h(0) &= x^2(0)+y^2(0)=5\\ h'(0) &= 2\cdot2\cdot0+2\cdot1\cdot0=0\\ h''(0) &= 2\cdot2\cdot(-3)+2\cdot1\cdot(-3)=-18\\ h'''(0) &= 2\cdot2\cdot0+6\cdot0\cdot(-3)+6\cdot0\cdot(-3)+2\cdot1\cdot0=0 \end{aligned}$$

$h(t)=5-9t^2+O(t^4)$; si t és petita i positiva $h(t)$ és decreixent; aleshores la distància decreix.

2. *(7 punts)* Sigui $F(x)$ una funció $C^2(\mathbb{R})$, amb $F(0) = -1$ i $F'(0) = -2$. Considerem l'equació $f(x,\varepsilon)$, on $f(x,\varepsilon) = x^2 + \varepsilon^2 F(x)$.

   (a) Estudieu si és possible aplicar el teorema de la funció implícita a $f(x,\varepsilon) = 0$ entorn de $(x,\varepsilon) = (0,0)$ i escriure les seves solucions com $x \equiv x(\varepsilon)$, amb $x(0) = 0$.

   (b) Sigui $g(y,\varepsilon) = \dfrac{f(\varepsilon y,\varepsilon)}{\varepsilon^2}$ si $\varepsilon \neq 0$. Demostreu que aquesta expressió permet definir també $g(y,0)$ (de fet, $g(y,0) = \lim_{\varepsilon\to 0} g(y,\varepsilon)$) i que $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Calculeu els zeros de $g(y,0)$.

   (c) Per a cada solució y^* de $g(y,0) = 0$ obtinguda a (b) apliqueu el teorema de la funció implícita a $g(y,\varepsilon) = 0$ i demostreu que, si ε és prou petit, podeu definir dues solucions $y = y_1(\varepsilon)$ i $y = y_2(\varepsilon)$ de l'equació.

   (d) Proveu que, si ε és prou petit, l'equació $f(x,\varepsilon) = 0$ té dues solucions $x = x_1(\varepsilon)$, $x = x_2(\varepsilon)$ i trobeu el seu desenvolupament de Taylor fins a ordre 2 inclòs.

Resolució:

(a) $f(0,0) = 0$ i f és C^2, però $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$; per tant no es pot aplicar el teorema de la funció implícita en $(0,0)$.

(b) $g(y,\varepsilon) = \dfrac{f(\varepsilon y,\varepsilon)}{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon^2 y^2 + \varepsilon^2 F(\varepsilon y)}{\varepsilon^2} = y^2 + F(\varepsilon y)$ és C^2

$g(y,0) = y^2 + F(0) = y^2 - 1 = 0 \Longrightarrow y = \pm 1$.

(c) $(1,0)$; $\quad g(1,0) = 0$; $\quad \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0) = (2y + F'(\varepsilon y)\varepsilon)_{(1,0)} = 2 \Longrightarrow$ el teorema de la funció implícita diu que existeix $y = y_1(\varepsilon)$ verificant

$$\begin{aligned} &y_1(\varepsilon) \quad \text{és } C^2 \\ &y_1(0) = 1 \\ &g(y_1(\varepsilon),\varepsilon) = 0, \quad \text{si } \varepsilon \text{ és prou petit} \end{aligned}$$

Si prenem el punt $(-1,0)$ igualment tenim $g(-1,0) = 0$; $\dfrac{\partial g}{\partial y}(-1,0) = -2 \Longrightarrow$ el teorema de la funció implícita diu que existeix $y = y_2(\varepsilon)$ verificant

$$\begin{aligned} &y_2(\varepsilon) \quad \text{és } C^2 \\ &y_2(0) = -1 \\ &g(y_2(\varepsilon),\varepsilon) = 0, \quad \text{si } \varepsilon \text{ és prou petit} \end{aligned}$$

(d) Siguin $x_j(\varepsilon) = \varepsilon y_j(\varepsilon)$, $j = 1,2$. Aleshores, tenim que

$$f(x_j(\varepsilon),\varepsilon) = f(\varepsilon y_j(\varepsilon),\varepsilon) = \varepsilon^2 g(y_j(\varepsilon),\varepsilon) = 0$$

Desenvolupant per Taylor $x_j(\varepsilon)$, tenim:

$$\begin{aligned} x_j(\varepsilon) &= \varepsilon y_j(\varepsilon) = \varepsilon(y_j(0) + y_j'(0)\varepsilon + O(\varepsilon^2)) = \\ &= \varepsilon y_j(0) + \varepsilon^2 y_j'(0) + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

per tant, només cal calcular $y_j'(0)$. Sabem que $g(y_j(\varepsilon),\varepsilon) = 0 \Longleftrightarrow y_j^2(\varepsilon) + F(\varepsilon y_j(\varepsilon)) = 0$. Derivem implícitament:

$$2y_j(\varepsilon)y_j'(\varepsilon) + F'(\varepsilon y_j(\varepsilon))(y_j(\varepsilon) + \varepsilon y_j'(\varepsilon)) = 0$$

$\varepsilon = 0$, $F'(0) = -2$, $2y_j(0)y_j'(0) - 2y_j(0) = 0$, $y_j'(0) = 1$. Per tant:

$$y_1(\varepsilon) = \varepsilon + \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)\,, \quad y_2(\varepsilon) = -\varepsilon + \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)\,.$$

3. *(6 punts)* Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $f(0,0) = 0$ i es verifica, en tot punt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $D_v f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sinh(f(x,y))$ on $v = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Sigui la funció $\varphi(x) = f(x,-x)$

   (a) Sabent que $\varphi'(0) = 1$, calculeu $D_x f(0,0)$, $D_y f(0,0)$.

   (b) Si sabem que $\varphi''(0) = 0$, calculeu les derivades segones de f en $(0,0)$.

   (c) Digueu quins valors han de tenir λ, β, α, γ, δ, per tal que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \lambda x - \beta y - \alpha xy - \gamma x^2 - \delta y^2}{x^2 + y^2} = 0\,.$$

   (*Observació:* $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.)

Resolució:

(a) Tenim $D_v f(x,y) = D_x f(x,y)\dfrac{1}{\sqrt{2}} + D_y f(x,y)\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\varphi'(x) = D_x f(x,-x) - D_y f(x,-x)$

$$\left.\begin{array}{l} D_x f(x,y)\dfrac{1}{\sqrt{2}} + D_y f(x,y)\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sinh f(x,y) \\ \varphi'(x) = D_x f(x,-x) - D_y f(x,-x) \end{array}\right\} \quad (a)$$

Substituint en $x = y = 0$ i usant $\varphi'(0) = 1$ i que $f(0,0) = 0$,

$$\left\{\begin{array}{l} D_x f(0,0) + D_y f(0,0) = \sinh(0) = 0 \\ D_x f(0,0) - D_y f(0,0) = 1 \end{array}\right.$$

Aleshores $D_x f(0,0) = \dfrac{1}{2}$, $D_y f(0,0) = -\dfrac{1}{2}$.

(b) Derivem (a) respecte de x:

$$\left.\begin{array}{l} D_{xx} f(x,y) + D_{yx} f(x,y) = \cosh(f(x,y))\, D_x f(x,y) \\ \varphi''(x) = D_{xx} f(x,-x) - D_{xy} f(x,-x) - D_{yx} f(x,-x) + D_{yy} f(x,-x) \end{array}\right\}$$

i derivem (a) respecte de y:

$$\left.\begin{array}{l} D_{xy} f(x,y) + D_{yy} f(x,y) = \cosh(f(x,y))\, D_y f(x,y) \\ 0 = 0 \end{array}\right\}$$

Substituïm $x = y = 0$, usem que $f(0,0) = 0$ i que $\varphi''(0) = 0$ i $D_x f(0,0) = \dfrac{1}{2}$, $D_y f(0,0) = -\dfrac{1}{2}$ i que $D_{xy} f = D_{yx} f$

$$\left.\begin{array}{l} D_{xx} f(0,0) + D_{xy} f(0,0) = \dfrac{1}{2} \\ D_{xx} f(0,0) - 2D_{xy} f(0,0) + D_{yy} f(0,0) = 0 \\ D_{xy} f(0,0) + D_{yy} f(0,0) = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

$D_{xx} f(0,0) = \dfrac{1}{2} - D_{xy} f(0,0)\,, \quad D_{yy} f(0,0) = -\dfrac{1}{2} - D_{xy} f(0,0),$

$\dfrac{1}{2} - D_{xy} f(0,0) - 2D_{xy} f(0,0) - \dfrac{1}{2} - D_{xy} f(0,0) = 0$

$D_{xy} f(0,0) = 0\,, \qquad D_{xx} f(0,0) = \dfrac{1}{2}\,, \qquad D_{yy} f(0,0) = -\dfrac{1}{2}.$

(c) Com $f(x,y) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}y^2\right) + R_3(x,y) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2} + \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} + R_3(x,y)$. I sabem que $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{R_3(x,y)}{x^2+y^2} = 0$, tenim:

$$\lim_{(0,0)} \frac{f(x,y) - \lambda x - \beta y - \alpha xy - \gamma x^2 - \delta y^2}{x^2 + y^2} =$$

$$= \lim_{(0,0)} \frac{\left(\dfrac{1}{2} - \lambda\right) x - \left(\dfrac{1}{2} + \beta\right) y - \alpha xy + \left(\dfrac{1}{4} - \gamma\right) x^2 - \left(\dfrac{1}{4} + \delta\right) y^2}{x^2 + y^2}$$

Fent límits direccionals ja es veu que aquest límit només pot existir si tots els coeficients són zero

$$\lambda = \frac{1}{2}\,, \qquad \beta = -\frac{1}{2}\,, \qquad \alpha = 0\,, \qquad \gamma = \frac{1}{4}\,, \qquad \delta = -\frac{1}{4}\,.$$