

### Problemes

1. (6 punts) Considereu l'equació

$$(x+1)z + ye^z - 1 = 0 \quad (*)$$

(a) Verifiqueu que (\*) defineix implícitament  $z = z(x, y)$  entorn del punt  $(x, y, z) = (0, 0, 1)$  i demostreu que el polinomi de Taylor de grau dos de  $z(x, y)$  entorn del  $(0, 0)$  és:

$$p(x, y) = 1 - x - ey + x^2 + 2exy + e^2y^2.$$

(b) Trobeu els valors de  $a$  i  $b$  pels quals  $q(x, y) = p(x, y) + ax + by$  pot tenir un extrem relatiu en  $(0, 0)$ .

(c) Per als valors de  $a$  i  $b$  de l'apartat anterior, apliqueu el criteri del hessià a  $q(x, y)$  en  $(0, 0)$ .

(d) Demostreu, amb independència del resultat de l'apartat (c), que  $q(x, y)$  té un mínim relatiu a  $(0, 0)$  per als valors de  $a$  i  $b$  de l'apartat (b).

#### Resolució:

(a)  $f(x, y, z) = (x+1)z + ye^z - 1$

(i)  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ .

(ii)  $f(0, 0, 1) = 0$ .

(iii)  $\frac{\partial f}{\partial z} = x + 1 + ye^z$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = 1 \neq 0$ .

Podem aïllar  $z = z(x, y)$  solució de  $f(x, y, z) = 0$  entorn de  $(0, 0, 1)$ , verificant:

(I)  $z(x, y) \in C^\infty$ , (II)  $z(0, 0) = 1$ , (III)  $f(x, y, z(x, y)) = 0$ .

Si derivem respecte  $x$  i  $y$  l'equació  $(x+1)z(x, y) + ye^{z(x, y)} - 1 = 0$ , obtenim

$$\left. \begin{aligned} z + (x+1)D_xz + ye^z D_xz &= 0 \\ (x+1)D_yz + e^z + ye^z D_yz &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Si  $x = y = 0$  i  $z(0, 0) = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} 1 + D_xz(0, 0) &= 0 \\ D_yz(0, 0) + e &= 0 \end{aligned} \right\} \implies D_xz(0, 0) = -1, \quad D_yz(0, 0) = -e.$$

Si tornem a derivar respecte  $x$  i  $y$ :

$$\left. \begin{aligned} 2D_xz + (x+1)D_{xx}z + ye^z(D_xz)^2 + ye^z D_{xx}z &= 0 \\ D_yz + (x+1)D_{xy}z + e^z D_xz + ye^z D_xz \cdot D_yz + ye^z D_{xy}z &= 0 \\ (x+1)D_{yy}z + 2e^z D_yz + ye^z(D_yz)^2 + ye^z D_{yy}z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Si  $x = y = 0$ ,  $z(0, 0) = 1$ ,  $D_xz(0, 0) = -1$  i  $D_yz(0, 0) = -e$ :

$$\left. \begin{aligned} -2 + D_{xx}z(0, 0) &= 0 \\ -e + D_{xy}z(0, 0) - e &= 0 \\ D_{yy}z(0, 0) - 2e^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \implies D_{xx}z(0, 0) = 2, \quad D_{xy}z(0, 0) = 2e, \quad D_{yy}z(0, 0) = 2e^2.$$

Finalment

$$\begin{aligned} p(x, y) &= z(0, 0) + D_xz(0, 0)x + D_yz(0, 0)y + \frac{1}{2!}(D_{xx}z(0, 0)x^2 + 2D_{xy}z(0, 0)xy + \\ &\quad + D_{yy}z(0, 0)y^2) = 1 - x - ey + x^2 + 2exy + e^2y^2 \end{aligned}$$

(b) És clar que  $D_x q(0,0) = -1 + a$ ,  $D_y q(0,0) = -e + b$ .

Així doncs,  $D_x q(0,0) = D_y q(0,0) = 0 \iff a = 1$  i  $b = e$ .

(c)  $D_{xx} q(0,0) = 2$ ,  $D_{xy} q(0,0) = 2e$ ,  $D_{yy} q(0,0) = 2e^2$

$$H_q(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2e \\ 2e & 2e^2 \end{pmatrix}$$

$\det(H_q(0,0)) = 0 \implies$  No podem decidir si  $(0,0)$  és un extrem usant el criteri del hessià.

(d)  $q(x,y) = 1 + (x + ey)^2 \geq 1 = q(0,0)$ ,  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}$ , d'on deduïm que  $(0,0)$  és un mínim relatiu de  $q$ .

2. (6 punts) Sigui  $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$  definida per a  $x \geq 0$ .

(a) Vegeu que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$ .

(b) Demostreu que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

(c) Vegeu que  $f(x)$  té un únic extrem relatiu si  $x > 0$  i calculeu-lo. Digueu (sense fer cap càlcul) si és màxim o mínim (raoneu la resposta). (Observeu que  $f(0) = 0$ .)

(d) Raoneu que  $f(x) > 0$  si  $x > 0$ .

(e) Demostreu per inducció la següent propietat:  $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ , per a tot  $n \in \mathbb{N}$ .

(Indicació: Useu l'apartat (d).)

**Resolució:**

$$(a) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2(\sqrt{x+1})^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = +\infty.$$

$$(b) f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{x - (x+1)}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{-1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

$$(c) f'(x) = 0 \iff \sqrt{\frac{x+1}{x}} - 1 - \frac{1}{x+1} = 0 \iff \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{x+2}{x+1} \iff \frac{x+1}{x} = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^2} \iff (x+1)^3 = x(x+2)^2 \iff x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x(x^2 + 4x + 4) \iff x^2 + x - 1 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

L'únic possible extrem relatiu per a  $x > 0$  és  $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . És clar que és un màxim ja que:

(i)  $f'(x) > 0$  si  $x \in \left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ , ja que  $f'(x) = 0$  només si  $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  i  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$ .

(ii) Com que  $f(0) = 0$  i  $f$  és estrictament creixent en  $\left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ , llavors  $f(x) > 0$  en aquest interval.

(iii) Com que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  i  $f'(x)$  té signe constant en  $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty\right)$ , llavors  $f'(x) < 0$  en aquest interval i  $f$  és estrictament decreixent.

(d) Com que  $f$  és estrictament creixent en  $\left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$  i estrictament decreixent en  $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty\right)$  i  $f(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , llavors és clar que  $f(x) > 0$  si  $x > 0$ .

(e) – Per a  $n = 1$  :  $\frac{1}{\sqrt{1}} = \sqrt{1}$  i la propietat és certa.

– Suposem la propietat certa per a un cert  $n \geq 1$ . Llavors:

$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ , on hem usat la hipòtesi d'inducció. Volem veure que:

$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1} \iff \sqrt{n} - \sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 0 \iff f(n) > 0$ , que és cert per l'apartat (d). Així doncs, la propietat també és certa per a  $n + 1$ .

3. (7 punts) Siguin  $f(x, y) = e^{x-x^2/2} + e^{-x+y^2/2} - 2$ ,  $g(x, y) = (x^2 + y^2)D_y f(x, y) - 2yf(x, y)$  i  $h(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1/2 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(a) Demostreu que el desenvolupament de Taylor de  $f$  entorn del  $(0, 0)$  fins a termes de grau 3 inclosos és:  $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}x(x^2 + y^2) + R_4(x, y)$ .

(b) Calculeu el desenvolupament de Taylor de  $g$  entorn del  $(0, 0)$  fins termes de grau 4 inclosos. (Indicació: Useu l'apartat (a).)

(c) Calculeu  $D_y h(x, y)$  per a tot  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

(d) Demostreu que  $D_y h(x, y)$  és contínua en  $(0, 0)$ .

**Resolució:**

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x, y) &= 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \left(x - \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(x - \frac{x^2}{2}\right)^3 + R_4(x) + \\ &+ 1 - x + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2!} \left(-x + \frac{y^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(-x + \frac{y^2}{2}\right)^3 + R_4(x, y) - 2 = \\ &= 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}(x^2 - x^3) + \frac{1}{6}x^3 + R_4(x) + \\ &+ 1 - x + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}(x^2 - xy^2) - \frac{1}{6}x^3 + R_4(x, y) - 2 = \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}x(x^2 + y^2) + R_4(x, y) \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad g(x, y) = (x^2 + y^2)(y - xy + R_3(x, y)) - 2y \left( \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}x(x^2 + y^2) + R_4(x) \right) = 0 + R_5(x, y).$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad D_y h(x, y) &= \frac{(x^2 + y^2)D_y f(x, y) - 2yf(x, y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{g(x, y)}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{(x^2 + y^2)e^{-x+(y^2/2)}y - 2y \left( e^{x-(x^2/2)} + e^{-x+(y^2/2)} - 2 \right)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_y h(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{h(0, y) - h(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{f(0, y)}{y^2} - \frac{1}{2}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1+e^{(y^2)/2}-2}{y^2} - \frac{1}{2}}{y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{y^2/2} - 1 - \frac{y^2}{2}}{y^3} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{y^2}{2} + R_4(y) - 1 - \frac{y^2}{2}}{y^3} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{R_4(y)}{y^3} = 0. \end{aligned}$$

(d) Hem de veure  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} D_y h(x, y) = 0$ . Usem els apartats (b) i (c):

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} D_y h(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{g(x, y)}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{0 + R_5(x, y)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^4} = 0.$$

Per les propietats del reste del desenvolupament de Taylor.