Càlcul Infinitesimal I/Càlcul I **Codi: 21702/21762**

Temps: 2 h. 15 min. **20 de juny de 2005**

Problemes

1. *(8 punts)*

   (a) Donada la funció

   $$g(x) = \begin{cases} x^n \ln|x| & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   Digueu per a quins valors de $n \in \mathbb{N}$

   i. És contínua.

   ii. És derivable.

   (b) Considerem la funció

   $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3 \ln|y|}{x^2+y^2} & \text{si} \quad y \neq 0 \\ x & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$$

   Estudieu la continuïtat de f en $(0,0)$.

   (c) Estudieu la derivabilitat de f en $(0,0)$.

   (d) Estudieu quines derivades direccionals de f en $(0,0)$ existeixen.

Resolució:

(a) i. La funció g és contínua per a $x \neq 0$. Estudiem si $\lim\limits_{0} g = g(0)$.
Si $n = 0$, clarament $\lim\limits_{0} g = -\infty$ i g no és contínua en el 0.
Si $n \geq 1$, $\lim\limits_{0^+} g = \lim\limits_{0^+} \dfrac{\ln x}{x^{-n}} = \lim\limits_{0^+} \dfrac{1/x}{-nx^{-n-1}} = -\dfrac{1}{n} \lim\limits_{0^+} x^n = 0$ i anàlogament, $\lim\limits_{0^-} g = 0$. Per tant, g és contínua en el 0.

ii. La funció g és derivable per a $x \neq 0$. Estudiem-ho per a $x = 0$.
$g'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^n \ln|h| - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h^{n-1} \ln|h|$.
Pel límit calculat a i., $\begin{cases} g \text{ no és derivable si } & n \leq 1 \\ g \text{ és derivable si } & n \geq 2, \text{ amb } g'(0) = 0. \end{cases}$

(b) Per calcular el límit a l'origen fem:

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^3 + y^3 \ln|y|}{x^2+y^2} = \lim_{(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} + \lim_{(0,0)} \frac{y^{5/2}}{x^2+y^2} \cdot \lim_{y \to 0} y^{1/2} \ln(y)$$

els dos primers els fem per polars

$$\left| \frac{r^3 \cos^3\theta}{r^2} \right| < r \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \lim_{(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$$

$$\left| \frac{r^{5/2} \cos^{5/2}\theta}{r^2} \right| < r^1/2 \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \lim_{(0,0)} \frac{y^{5/2}}{x^2+y^2} = 0$$

el tercer és un límit d'una variable que podem fer usant la regla de l'Hôpital

$$\lim_{y \to 0^+} y^{1/2} \ln|y| = \lim_{y \to 0^+} \frac{\ln y}{y^{-1/2}} = \lim_{y \to 0^+} \frac{y^{-1}}{-\frac{1}{2} y^{-3/2}} = \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{-\frac{1}{2} y^{-1/2}} = \lim_{y \to 0^+} -2y^{1/2} = 0$$

i el mateix per l'esquerra, obtenint $\lim\limits_{y \to 0} y^{1/2} \ln|y| = 0$. Per tant,

$$\lim_{\substack{(0,0) \\ y \neq 0}} \frac{x^3 + y^3 \ln|y|}{x^2+y^2} = 0 \Longrightarrow \lim_{(0,0)} f(x,y) = 0 \text{ i } f \text{ és contínua en } (0,0).$$

D'altra banda, $\lim\limits_{\substack{(0,0) \\ y=0}} x = 0$.

(c) $f(x,0) = x$, $\forall x$, $f(0,y) = \begin{cases} y \ln|y| & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$. Deduïm: $D_x f(0,0) = 1$ i, de l'apartat (a)ii., $\nexists\, D_y f(0,0)$. Per tant, f no és derivable en el $(0,0)$.

(d) Sigui $v=(v_1,v_2)$ amb $v_1^2+v_2^2=1$. Tenim: $D_vf(0,0)=\varphi'(0)$, amb $\varphi(t)=f(tv_1,tv_2)$.
• Si $v_2=0$, $v=(\pm1,0)$ i llavors $D_vf(0,0)=\pm D_xf(0,0)=\pm1$.
• Si $v_2\neq 0$, $\varphi(t)=\begin{cases} tv_1^3+tv_2^3\ln|tv_2| & \text{si} \quad t\neq 0\\ 0 & \text{si} \quad t=0\end{cases}$

$$\varphi'(0)=\lim_{h\to 0}(v_1^3+v_2^3\underbrace{\ln|hv_2|}_{\substack{\downarrow\\-\infty}}), \quad \text{per tant} \quad \nexists D_vf(0,0)\,.$$

2. *(6 punts)* Donada l'equació

$$x^2e^u-\cos(y+u^2)=0 \quad (E)$$

(a) Proveu que, en un entorn de $(x,y,u)=(1,0,0)$, (E) defineix a u com a funció implícita de x,y.

(b) Si $g(x,y)$ és la funció implícita de l'apartat (a), calculeu el seu polinomi de Taylor de primer grau en $(x,y)=(1,0)$.

(c) Estudieu el límit $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{g(x,y)+x-y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$.

Resolució:

(a) Definim $F(x,y,u)=x^2e^u-\cos(y+u^2)$ i tenim:
• F és $C^\infty(\mathbb{R}^3)$
• $F(1,0,0)=0$
• $\dfrac{\partial F}{\partial u}(1,0,0)=(x^2e^u+\sin(y+u^2)2u)_{(1,0,0)}=1\neq 0$, aleshores el teorema de la funció implícita assegura l'existència de $u=g(x,y)$ tal que:
• g és C^∞
• $g(1,0)=0$
• $F(x,y,g(x,y))=0 \quad (*)$

(b) De (*), és a dir $x^2e^{g(x,y)}-\cos(y+g(x,y)^2)=0$ derivem implícitament:
• $\dfrac{\partial}{\partial x}$: $2xe^{g(x,y)}+x^2e^{g(x,y)}\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)+\sin(y+g(x,y))^2\cdot 2g(x,y)\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0$; substituïm $x=1$, $y=0$, $g(1,0)=0$, obtenim: $2+\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,0)=0$ i, per tant, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,0)=-2$.
• $\dfrac{\partial}{\partial y}$: $x^2e^{g(x,y)}\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)+\sin(y+g(x,y)^2)2g(x,y)\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0$; substituïm $x=1$, $y=0$, $g(1,0)=0$ i, per tant, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0)=0$.
Aleshores, el polinomi de Taylor de grau 1 de g en $(1,0)$ és: $0-2(x-1)+0y=-2(x-1)$. Per tant,

$$g(x,y)=-2(x-1)+O(\|x-1,\,y\|^2)=-2(x-1)+R_2\,.$$

(c) Usant la fórmula de Taylor:
$\displaystyle\lim_{(1,0)}\frac{g(x,y)+x-y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=\lim_{(1,0)}\frac{-(x-1)-y+R_2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=\lim_{(1,0)}\frac{-(x-1)-y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$, ja que $\displaystyle\lim_{(1,0)}\frac{R_2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$.
Aquest límit no existeix. Per exemple, si considerem la recta $x=1$:
$\displaystyle\lim_{\substack{(1,0)\\x=1}}\frac{-(x-1)-y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=\lim_{y\to0}\frac{-y}{|y|}$ i aquest límit no existeix perquè $\displaystyle\lim_{y\to0^+}\frac{y}{|y|}=1$ i $\displaystyle\lim_{y\to0^-}\frac{y}{|y|}=-1$.

3. *(8 punts)* Donada la funció $f(x)=\dfrac{x-8}{2x-9}$

(a) Calculeu-ne les asímptotes.

(b) Representeu-la gràficament.

(c) Calculeu el conjunt imatge de l'interval $]-\infty,1[$, és a dir, $f(]-\infty,1[)$.

Sigui ara la successió definida per la recurrència $u_n=\dfrac{u_{n-1}-8}{2u_{n-1}-9}$, $n\geq 1$, on $u_0=-3$. Usant els apartats anteriors, proveu:

(d) Proveu que $\forall\, n,\ u_n<1$.

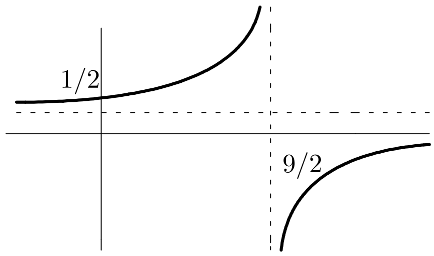
(e) Proveu que u_n és creixent.

(f) Proveu que u_n és convergent i calculeu $\lim u_n$.

Resolució:

(a) $\lim_{x\to 9/2^+} f = -\infty$, $\lim_{x\to 9/2^-} f = \infty \Rightarrow x = 9/2$ asímptota vertical (per la dreta i per l'esquerra); $\lim_{x\to\pm\infty} f = 1/2 \Rightarrow y = 1/2$ asímptota horitzontal (quan $x\to\infty$ i quan $x\to-\infty$).

(b) A més de les asímptotes, observem que $f'(x) = \dfrac{7}{(2x-9)^2} > 0, \forall\, x \neq 9/2$. Per tant, f és estrictament creixent a $]-\infty, 9/2[$ i $]9/2, \infty[$.



(c) Com que $f(1) = 1$, per la gràfica veiem clarament que $f(]-\infty,1[) = \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

(d) Tenim $u_n = f(u_{n-1})$, $n \geq 1$, amb $u_0 = -3$. Per inducció:
- $n = 0$: $u_0 = -3 < 1$.
- $n \to n+1$: $u_n < 1 \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$, $u_{n+1} < 1$.

(e) Per inducció, provem que $u_n < u_{n+1}$, $\forall\, n \geq 0$
- $n = 0$: $u_0 = -3$, $u_1 = \dfrac{11}{15}$, $u_0 < u_1$.
- $n \to n+1$: $u_n < u_{n+1} \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) < f(u_{n+1}) = u_{n+2}$, ja que $u_n, u_{n+1} \in \left]-\infty, \dfrac{9}{2}\right[$ i f és estrictament creixent.

(f) u_n és creixent i fitada superiorment ($u_n < 1, \forall\, n$)$\Rightarrow$ és convergent. El límit ℓ ha de complir: $\ell = \dfrac{\ell - 8}{2\ell - 9}$ $\Rightarrow \ell = 1$ o $\ell = 4$. Com que $u_n < 1$, $\forall\, n$, el límit ha de ser $\ell = 1$.

4. *(8 punts)* Considerem la funció $g(x,y) = y - xy - \ln(y + x^3 + \cos x)$

(a) Trobeu el seu desenvolupament de Taylor al $(0,0)$ fins a grau 3.

(b) Utilitzant el desenvolupament de Taylor trobat a (a), calculeu les derivades parcials primeres i segones de g en $(0,0)$.

(c) Estudieu si g té un extrem relatiu en $(0,0)$
(Indicació: calculeu $g(x,x)$ usant el desenvolupament de Taylor calculat a (a)).

Resolució:

(a) Tenim que:

$$y + x^3 + \cos x = 1 + y - \frac{x^2}{2} + x^3 + O_4\,; \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O_4$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
\ln(y + x^3 + \cos x) &= \ln(1 + y - \frac{x^2}{2} + x^3 + O_4) = \\
&= y - \frac{x^2}{2} + x^3 - \frac{1}{2}\left(y - \frac{x^2}{2} + x^3\right)^2 + \frac{1}{3}\left(y - \frac{x^2}{2} + x^3\right)^3 + O_4 = \\
&= y - \frac{x^2}{2} + x^3 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{yx^2}{2} + \frac{1}{3}y^3 + O_4
\end{aligned}$$

Aleshores,

$$g(x,y) = y - xy - y + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - x^3 - \frac{yx^2}{2} - \frac{y^3}{3} + O_4 = \frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2} - x^3 - \frac{yx^2}{2} - \frac{y^3}{3} + O_4$$

(b) $D_x g(0,0) = D_y g(0,0) = 0$, doncs no hi ha termes de primer grau en el desenvolupament de Taylor. Dels termes de segon grau obtenim:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{1}{2!}D_{xx}g(0,0) \quad &\Rightarrow \quad D_{xx}g(0,0) = 1 \\
-1 &= \frac{1}{2!}2D_{xy}g(0,0) \quad &\Rightarrow \quad D_{xy}g(0,0) = -1 \\
\frac{1}{2} &= \frac{1}{2!}D_{yy}g(0,0) \quad &\Rightarrow \quad D_{yy}g(0,0) = 1
\end{aligned}$$

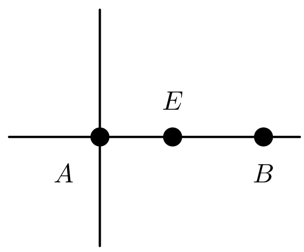
(c) Sabem que $D_x g(0,0) = D_y g(0,0) = 0$ i que $Hg(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; com $\det Hg(0,0) = 0$, el criteri per determinar extrems no decideix. Usant el desenvolupament de Taylor, podem calcular

$$g(x,x) = \frac{x^2}{2} - x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3} + O(x^4) = -\frac{11}{6}x^3 + O(x^4) = x^3\left(-\frac{11}{6} + O(x)\right)$$

Aleshores en un entorn de $x = 0$ (per a x molt petit), $-\dfrac{11}{6} + O(x) < 0$ i tenim:
$g(x,x) = \begin{cases} < 0 & \text{si} \quad x > 0 \\ > 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ deduïm que g no té un extrem relatiu en $(0,0)$, sinó un punt de sella.

Qüestió relativa als problemes d'aplicació

- Es vol construir una escola E comú a dos pobles A, B situats en un gran pla. En A viuen 50 nens/es i en B en viuen 70. On haurem d'escollir el lloc perquè el temps total de desplaçament de nens i nenes sigui mínim? (Suposem que totes les criatures caminen a la mateixa velocitat uniforme v, la qual pot considerar-se en unitats adequades igual a 1.)



(a) Plantegeu el problema matemàticament, indicant quina és la funció a minimitzar, i quines equacions han de satisfer les coordenades (x, y) del punt d'ubicació de l'escola. (Suggerim establir un sistema de coordenades de manera que A estigui en el punt $(0, 0)$, B en $(b, 0)$ i E en (x, y).)

(b) Digueu quines són les coordenades (x, y) de l'escola.

Resolució:

En primer lloc cal destacar dos punts importants, abans de definir la funció a optimitzar:

(a) A l'igual que es va fer a classe, hem de trobar la posició (x, y) de l'escola de forma que el temps invertit per tots els estudiants dels dos pobles sigui sigui mínim. Si recordeu la fórmula que s'obtenia pels temps total, veureu que les distàncies apareixen multiplicant, de forma que a major distància d'una població a l'escola, més temps invertit pels nens d'aquell poble. Suposeu ara que trobem un cert punt (x_0, y_0) a on situar l'escola que minimitzi el temps total empleat. Aleshores és fàcil veure que si el projectem sobre l'eix $y = 0$, el punt obtingut $(x_0, 0)$ verificarà que la seva distància als punts $A = (0, 0)$ i $B = (b, 0)$ és menor que la del punt (x_0, y_0) (apliqueu Pitàgores) i, en conseqüència, el temps total invertit. D'això es dedueix que el punt (x, y) on situar l'escola cal que sigui a la recta $y = 0$. Per tant, ja no és un problema 2-dimensional, sino que només cal considerar-ho sobre la recta $y = 0$: suposem $A = 0$, $B = b$ i busquem x la posició on hauríem de situar l'escola.

(b) Seguint un raonament anàleg a l'anterior, s'arriba a la conclusió de que els possibles valors de x que minimitzen són aquells que es troben a l'interval $[0, b]$.

Per tant, a l'igual que es va fer en el cas 2-dimensional, la funció *Temps total invertit* a minimitzar vé donada per

$$T(x) = 50x + 70(b - x) = 70b - 20x.$$

Aquesta funció és contínua i estrictament decreixent (la seva derivada és $T'(x) = -20 < 0$), de manera que el seu mínim absolut s'assoleix al punt $x = b$. Conclusió: la manera de minimitzar el temps total invertit per anar a l'escola des d'ambdós pobles és construint l'escola a la població B, la de major nombre d'habitants.