

### Problemes

1. (5 punts) Sigui  $f \in C^2(\mathbb{R})$  una funció donada i considereu la funció  $g(x, y) = f(x) \cdot f(y)$ .
- (a) Si denotem per  $a = f(0)$ ,  $b = f'(0)$  i  $c = f''(0)$ , calculeu el desenvolupament de Taylor de  $g(x, y)$  en  $(0, 0)$  fins termes de grau 2 inclosos en funció dels valors de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .
- (b) Supposeu ara que  $b = 0$  i  $a \cdot c \neq 0$ . Vegeu si  $g(x, y)$  pot tenir un extrem relatiu en  $(0, 0)$  i discutiu de quin tipus és en funció dels valors de  $a$ ,  $c$ .
- (c) Trobeu tots els extrems relatius de  $g(x, y) = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+y^2}$  i digueu de quin tipus són.

#### Resolució:

$$(a) \quad g(x, y) = f(x) \cdot f(y) = \left( a + bx + \frac{c}{2}x^2 + R_3(x) \right) \cdot \left( a + by + \frac{c}{2}y^2 + R_3(y) \right) = \\ = a^2 + ab(x+y) + \frac{a \cdot c}{2}x^2 + b^2xy + \frac{a \cdot c}{2}y^2 + R_3(x, y).$$

$$(b) \quad b = f'(0) = 0 \quad \implies \quad g(x, y) = a^2 + \frac{a \cdot c}{2}(x^2 + y^2) + R_3(x, y).$$

$$D_xg = a \cdot cx + R_2(x, y); \quad D_yg = a \cdot c \cdot y + R_3(x, y)$$

$$D_xg(0, 0) = D_yg(0, 0) = 0 \quad \implies \quad g \text{ té un candidat a extrem relatiu en } (0, 0)$$

$$D_{xx}g = a \cdot c + R_1(x, y); \quad D_{xy}g = 0 + R_1(x, y); \quad D_{yy}g = a \cdot c + R_1(x, y).$$

$$\text{Així la matriu hessiana de } g \text{ és } H = H_g(0, 0) = \begin{pmatrix} a \cdot c & 0 \\ 0 & a \cdot c \end{pmatrix}$$

- Si  $a \cdot c > 0 \implies H$  té dos valors propis positius  $\implies$  mínim relatiu.
- Si  $a \cdot c < 0 \implies H$  té dos valors propis negatius  $\implies$  màxim relatiu.

$$(c) \quad \left. \begin{aligned} D_xg &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{1+y^2} = 0 \\ D_yg &= \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{-2y}{(1+y^2)^2} = 0 \end{aligned} \right\} \iff x = y = 0 \quad \text{únic candidat a extrem relatiu de } g(x, y).$$

$$g(x, y) = f(x) \cdot f(y), \text{ on } f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + R_4(x) \implies a = 1, b = 0, c = -2, \\ b = 0 \text{ i } a \cdot c = -2 < 0 \implies (0, 0) \text{ màxim relatiu de } g.$$

2. (7 punts) Sigui  $F(x, y, z) = z^2 + 2yz + xyz - 2e^y + 1$ .
- (a) Demostreu que  $F(x, y, z) = 0$  defineix implícitament  $z = z(x, y)$  entorn del punt  $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ .
- (b) Calculeu les derivades parcials 1eres i 2ones de la funció  $z(x, y)$  avaluades en  $(0, 0)$  i discutiu si  $z(x, y)$  té o no un extrem relatiu en  $(0, 0)$ .
- (c) Discutiu l'existència o no del límit  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{z(x, y) - 1 + \lambda(xy - y^2)}{x^2 + y^2}$  en funció del valor de  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

#### Resolució:

$$(a) \quad \bullet \quad F \in C^\infty(\mathbb{R}^3); \quad F(0, 0, 1) = 1^2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1 - 2e^0 + 1 = 0$$

$$\bullet \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z + 2y + xy; \quad \frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 1) = 2 \neq 0$$

Podem aplicar el teorema de la funció implícita i aïllar implícitament  $z = z(x, y)$  entorn del punt  $(0, 0, 1)$ , verificant

•  $z(x, y) \in C^\infty$ ; •  $z(0, 0) = 1$ ; •  $F(x, y, z(x, y)) = 0$

(b)  $z = z(x, y)$  verifica  $z^2 + 2yz + xyz - 2e^y + 1 = 0$ .

• Derivem respecte  $x$ :  $2zD_xz + 2yD_xz + yz + xyD_xz = 0$  (\*)

Fem  $x = y = 0$  i  $z = z(0, 0) = 1 \implies D_xz(0, 0) = 0$ .

• Derivem respecte  $y$ :  $2zD_yz + 2z + 2yD_yz + xz + xyD_yz - 2e^y = 0$  (\*\*)

Fem  $x = y = 0$  i  $z = z(0, 0) = 1 \implies D_yz(0, 0) = 0$ .

• Derivem (\*) respecte  $x$ :  $2(D_xz)^2 + 2zD_{xx}z + 2yD_{xx}z + 2yD_xz + xyD_{xx}z = 0$

Fem  $x = y = 0 \implies D_{xx}z(0, 0) = 0$ .

• Derivem (\*) respecte  $y$ :  $2D_yz \cdot D_xz + 2zD_{xy}z + 2D_xz + 2yD_{xy}z + z + yD_yz + xD_xz + xyD_{xy}z = 0$

Fem  $x = y = 0 \implies 2D_{xy}z(0, 0) + 1 = 0 \implies D_{xy}z(0, 0) = -1/2$ .

• Derivem (\*\*) respecte  $y$ :  $2(D_yz)^2 + 2zD_{yy}z + 4D_yz + 2yD_{yy}z + 2xD_yz + xyD_{yy}z - 2e^y = 0$

Fem  $x = y = 0 \implies 2D_{yy}z(0, 0) - 2 = 0 \implies D_{yy}z(0, 0) = 1$ .

Així,  $D_xz(0, 0) = D_yz(0, 0) = 0 \implies z(x, y)$  té un candidat a extrem relatiu en  $(0, 0)$ . Calculem el hessià de  $z(x, y)$  en  $(0, 0)$ :

$$H = \begin{pmatrix} D_{xx}z(0, 0) & D_{xy}z(0, 0) \\ D_{xy}z(0, 0) & D_{yy}z(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det H = -\frac{1}{4} < 0 \implies (0, 0)$  és un punt de sella de  $z(x, y)$ .

(c) El desenvolupament de Taylor fins grau 2 de  $z(x, y)$  en  $(0, 0)$  és:

$$z(x, y) = z(0, 0) + D_xz(0, 0)x + D_yz(0, 0)y + \frac{1}{2!}(D_{xx}z(0, 0)x^2 + 2D_{xy}z(0, 0)xy + D_{yy}z(0, 0)y^2) + R_3(x, y) = 1 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}y^2 + R_3(x, y),$$

on  $\lim_{(0,0)} \frac{R_3(x, y)}{x^2 + y^2} = 0$ .

Per tant:  $\lim_{(0,0)} \frac{z(x, y) - 1 + \lambda(xy - y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{(0,0)} (\lambda - (1/2)) \frac{xy - y^2}{x^2 + y^2}$ .

• És clar que si  $\lambda = 1/2$  el límit és zero.

• Si  $\lambda \neq 1/2$  llavors el límit no existeix. En efecte, si fem límits per rectes  $y = mx$  en el  $(0, 0)$  de  $\frac{xy - y^2}{x^2 + y^2}$ , el límit dóna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot mx - (mx)^2}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m - m^2}{1 + m^2} = \frac{m - m^2}{1 + m^2},$$

que depèn del valor de  $m$ .

3. (7 punts) Sigui  $f(x, y) = \frac{2x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  i  $f(0, 0) = 0$ .

(a) Proveu que  $f$  és contínua per a tot  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

(b) Calculeu  $D_x f(x, y)$  i  $D_y f(x, y)$ , per a tot  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

(c) Sigui  $v = (a, b)$  un vector unitari qualsevol. Calculeu  $D_v f(0, 0)$  aplicant la definició de derivada direccional i proveu que  $D_v f(0, 0) = 3a^3 - a$ .

- (d) Digueu si el valor obtingut per a  $D_v f(0, 0)$  en l'apartat (c) verifica o no la fórmula del gradient i discutiu si  $f$  pot ser una funció  $C^1$  en  $(0, 0)$ . (Raoneu la resposta.)
- (e) Calculeu el màxim i mínim absolut de la funció  $g(a) = 3a^3 - a$  en l'interval  $[-1, 1]$  i digueu quins són els vectors  $v$  de l'apartat (c) que fan màxima i mínima la derivada direccional  $D_v f(0, 0)$ .

### Resolució:

- (a) Usem coordenades plars:  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$

$$|f(r \cos \theta, r \sin \theta) - 0| = \left| \frac{2(r \cos \theta)^3 - r \cos \theta (r \sin \theta)^2}{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} \right| \leq 3r := g(r),$$

on  $\lim_{r \rightarrow 0^+} g(r) = 0 \implies \lim_{(0,0)} f(x, y) = 0 \implies f$  és contínua en  $(0, 0)$ .

(b)  $D_x f(x, y) = \frac{(6x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - (2x^3 - xy^2)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^4 + 7x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}$ , si  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

$$D_y f(x, y) = \frac{-2xy(x^2 + y^2) - (2x^3 - xy^2)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-6x^3y}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$D_x f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^3}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 0.$$

$$D_y f(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{y^2}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

- (c)  $v = (a, b)$  unitari amb  $a^2 + b^2 = 1$

$$\begin{aligned} D_v f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(a, b)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(at, bt)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{2(at)^3 - at(bt)^2}{(at)^2 + (bt)^2}}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (2a^3 - ab^2) = 2a^3 - ab^2; \end{aligned}$$

usant la condició  $a^2 + b^2 = 1$  obtenim  $D_v f(0, 0) = 2a^3 - a(1 - a^2) = 3a^3 - a$ .

- (d) Per la fórmula del gradient, si  $f \in C^1$  en  $(0, 0)$ , llavors:

$$D_v f(0, 0) = \langle \text{grad } f(0, 0), v \rangle = \langle (D_x f(0, 0), D_y f(0, 0)), (a, b) \rangle = 2 \cdot a + 0 \cdot b = 2a.$$

Per tant, la fórmula del gradient no és certa en  $(0, 0)$  i  $f$  no pot ser  $C^1$  en  $(0, 0)$ .

$$g'(a) = 9a^2 - 1 = 0 \iff a = \pm 1/3$$

$$g''(a) = 18a \implies \begin{cases} g''(1/3) > 0 & \implies \text{mínim relatiu} \\ g''(-1/3) < 0 & \implies \text{màxim relatiu} \end{cases}$$

Llavors cal estudiar els valors de  $g$  en  $\pm 1/3$  i en els extrems de l'interval:  $\pm 1$

$$g(1/3) = -2/9, \quad g(-1/3) = 2/9, \quad g(1) = 2, \quad g(-1) = -2.$$

Per tant, el màxim i mínim absolut de  $g$  en  $[-1, 1]$  són 1 i  $-1$ , respectivament. Clarament  $D_v f(0, 0) = g(a)$  i per tant, el valor màxim de la derivada direccional és quan  $a = 1$  i  $b^2 = 1 - a^2 = 0 \implies b = 0 \implies v = (1, 0)$ .

Ídem, el valor mínim és quan  $v = (-1, 0)$ .