

Problemes

1. (6 punts) Donada l'equació

$$3x^2 - 2y^3 - \alpha z^2 y^2 + \alpha xyz - 1 = 0 \quad (1)$$

- (a) Digueu per a quins valors del paràmetre $\alpha \in \mathbb{R}$ l'equació (1) defineix localment una funció implícita $z = g(x, y)$ en el punt $(1, 1, 1)$.
- (b) Determineu els valors de α per als quals el gradient $\text{grad } g(1, 1)$ és nul.
- (c) Per a $\alpha \neq 0$, calculeu la fórmula de Taylor de 1r grau de la funció $g(x, y)$ al $(1, 1)$.
- (d) Si $\alpha \neq 0$, digueu per a quins valors de α existeix el següent límit i calculeu-lo:

$$\lim_{(1,1)} \frac{g(x, y) - 1 + x - y}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}.$$

Resolució: Definim $f(x, y, z) = 3x^2 - 2y^3 - \alpha z^2 y^2 + \alpha xyz - 1$.

(a) Verifiquem les hipòtesis del teorema de la funció implícita (TFI):

$$f(1, 1, 1) = 3 - 2 - \alpha + \alpha - 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) = (-2\alpha z y^2 + \alpha xy)(1, 1, 1) = -\alpha \neq 0, \text{ si } \alpha \neq 0$$

f és $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, aleshores:

• si $\alpha \neq 0$, el TFI ens diu que $\exists U \subset \mathbb{R}^2$ entorn de $(1, 1)$ i $\exists V \subset \mathbb{R}$ entorn de 1 i $\exists g: U \rightarrow V$, $(x, y) \rightarrow g(x, y)$ tal que

i. g és $C^\infty(U)$.

ii. $g(1, 1) = 1$

iii. $\forall (x, y) \in U$,

$$f(x, y, g(x, y)) = 3x^2 - 2y^3 - \alpha g^2(x, y)y^2 + \alpha xyg(x, y) - 1 = 0 \quad (*)$$

• si $\alpha = 0$, no es pot aplicar el TFI, però examinant

$$f(x, y, z) = 3x^2 - 2y^3 - 1 \quad (**)$$

veiem que $f = 0$ no defineix cap funció $z = g(x, y)$ ja que z no apareix a l'equació (**).

(b) Calculem les derivades parcials de $g(x, y)$ derivant implícitament (*)

$$\frac{\partial}{\partial x} : 6x - 2\alpha g(x, y) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)y^2 + \alpha g(x, y) + \alpha x \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0$$

substituint $x = y = 1$ i usant que $g(1, 1) = 1$ obtenim

$$6 + \alpha - \alpha \frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 0 \implies \frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = \frac{\alpha + 6}{\alpha}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} : -6y^2 - 2\alpha g(x, y) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)y^2 - \alpha g^2(x, y)2y + \alpha xg(x, y) + \alpha xy \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$$

substituint $x = y = 1$ i usant que $g(1, 1) = 1$ obtenim

$$\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = -\frac{\alpha + 6}{\alpha}$$

$$\text{Per tan, } \text{grad } g(1, 1) = \left(\frac{\alpha + 6}{\alpha}, -\frac{\alpha + 6}{\alpha} \right) = \frac{\alpha + 6}{\alpha} (1, -1)$$

Si $\alpha = -6$, $\text{grad } g(1, 1) = (0, 0)$.

(c) La fórmula de Taylor de g al $(1, 1)$ és

$$\begin{aligned} g(1, 1) &= g(1, 1) + \frac{\partial g}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1)(y - 1) + R_2(x, y) = \\ &= 1 + \frac{\alpha + 6}{\alpha}(x - 1) - \frac{\alpha + 6}{\alpha}(y - 1) + R_2(x, y) \end{aligned}$$

(d) Usem que $\lim_{(1,1)} \frac{R_2(x, y)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} = 0$. Per tant:

$$\begin{aligned} \lim_{(1,1)} \frac{g(x, y) - 1 + x - y}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} &= \lim_{(1,1)} \frac{1 + \frac{\alpha + 6}{\alpha}(x - 1) - \frac{\alpha + 6}{\alpha}(y - 1) - 1 + x - y}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} = \\ & \text{(fent } u = x - 1 \text{ i } v = y - 1), \\ &= \lim_{(0,0)} \frac{1 + \frac{\alpha + 6}{\alpha}u - \frac{\alpha + 6}{\alpha}v - 1 + u + 1 - (v + 1)}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \lim_{(0,0)} \frac{\left(\frac{\alpha + 6}{\alpha} + 1\right)u - \left(\frac{\alpha + 6}{\alpha} + 1\right)v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \\ &= \lim_{(0,0)} \left(\frac{\alpha + 6}{\alpha} + 1\right) \frac{u - v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \left(\frac{\alpha + 6}{\alpha} + 1\right) \lim_{(0,0)} \frac{u - v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \end{aligned}$$

Si $\alpha = -3$, el límit val 0.

Si $\alpha \neq -3$, tenim $\lim_{(0,0)} \frac{u - v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ no existeix, ja que si fem límits direccionals $v = mu$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u - mu}{\sqrt{u^2 + m^2u^2}} = \begin{cases} \lim_{u \rightarrow 0^+} = \frac{1 - m}{\sqrt{1 + m^2}} \\ \lim_{u \rightarrow 0^-} = -\frac{1 - m}{\sqrt{1 + m^2}} \end{cases} \quad \text{cada semirecta té un límit diferent.}$$

2. (6 punts)

(a) Donat $n \in \mathbb{N}$, useu el teorema del valor mig aplicat a la funció $f(x) = \frac{1}{x}$, a $[n, n + 1]$ per provar que $\frac{1}{(n + 1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1} < \frac{1}{n^2}$.

(b) Donada la successió $A_N = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{N^2}$

i. Proveu que $A_{N+1} - 1 \leq 1 - \frac{1}{N+1} \leq A_N$.

ii. Proveu que A_N és creixent i fitada superiorment.

iii. Proveu que A_N és convergent i que, posant $A = \lim A_N$, es verifica que $1 \leq A \leq 2$.

Resolució:

(a) El teorema del valor mig aplicat a $f(x) = \frac{1}{x}$ si $a < b$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad a < c < b$$

és a dir,

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{c^2}(b - a).$$

Si prenem $b = n + 1$ i $a = n$ tenim:

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{c^2}, \quad n < c < n + 1. \quad (*)$$

D'altra banda, si $n < c < n + 1$, aleshores

$$-\frac{1}{n^2} < -\frac{1}{c^2} < -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Per tant, de (*), tenim

$$-\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < -\frac{1}{(n+1)^2},$$

o, el que és el mateix:

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n^2}.$$

(b) i. Si usem (a) per a $n = 1, 2, \dots, N$, tenim

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2^2} & < & 1 - \frac{1}{2} & < & \frac{1}{1^2} \\ \frac{1}{3^2} & < & \frac{1}{2} - \frac{1}{3} & < & \frac{1}{2^2} \\ \frac{1}{4^2} & < & \frac{1}{3} - \frac{1}{4} & < & \frac{1}{3^2} \\ & & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{(N+1)^2} & < & \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} & < & \frac{1}{N^2} \end{array}$$

Sumant aquestes desigualtats tenim:

$$\frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(N+1)^2} < 1 - \frac{1}{N+1} < \frac{1}{1^2} + \dots + \frac{1}{N^2}$$

és a dir,

$$A_{N+1} - 1 < 1 - \frac{1}{N+1} < A_N \quad (**)$$

com volem veure.

ii. Com $A_{N+1} = A_N + \frac{1}{(N+1)^2} > A_N$, és estrictament creixent. Per una altra banda, de (**)
tenim, usant la primera desigualtat:

$$A_{N+1} < 2 - \frac{1}{N+1} < 2 \implies A_{N+1} < 2, \quad \forall N$$

Llavors A_N és fitada superiorment per 2.

iii. Essent A_N creixent i fitada superiorment sabem que té límit. Diem $A = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N$. D'altra
banda (**) diu que

$$A_{N+1} - 1 < 1 - \frac{1}{N+1} < A_N$$

i, usant el fet que els límits preserven les desigualtats:

$$A - 1 \leq 1 \leq A.$$

Per tant, $1 \leq A$ i $A \leq 2$, tal com volíem veure.

3. (6 punts)

(a) Donada una funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , proveu que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h^2} = \frac{f''(x)}{2}.$$

(b) Donada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞ i que verifica $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$|f(x) - f(y) - f'(y)(x - y)| \leq |x - y|^3.$$

i. Proveu que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 0$.

ii. Vegeu que $f(x)$ és una recta ($f(x) = ax + b$, per a alguns $a, b \in \mathbb{R}$.)

Resolució:

(a) Per fer el límit, que és indeterminat, usarem la regla de l'Hôpital varies vegades:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h^2} &= \frac{0}{0} \quad \text{ja que } f \text{ és contínua} \\ &\text{Apliquem H\^opital} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{2h} = \frac{0}{0} \quad \text{ja que } f' \text{ és contínua} \\ &\text{Apliquem H\^opital} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h)}{2} = \frac{f''(x)}{2} \quad \text{ja que } f'' \text{ és contínua} \end{aligned}$$

(b) i. De l'apartat anterior sabem que $\forall x$:

$$\frac{f''(x)}{2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h^2}.$$

Per calcular aquest límit usem que

$$|f(x+h) - f(x) - f'(x)h| \leq |h|^3$$

per tant,

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h^2} \right| < |h|$$

i, llavors

$$0 \leq \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h^2} \right| \leq \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0.$$

Això ens diu que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h^2} \right| = 0$$

i per tant

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h^2} = 0 \Rightarrow \frac{f''(x)}{2} = 0, \quad \forall x.$$

ii. Com f és C^∞ , tenim que $f''(x)$ és C^∞ i idènticament nul·la $\Rightarrow f'(x) = a$ per a certa constant $a \in \mathbb{R}$.

Si considerem ara la funció $g(x) = f(x) - ax$ tenim que $g'(x) = f'(x) - a = 0$, és idènticament nul·la $\Rightarrow g(x) = b$ per a certa constant $b \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = g(x) + ax = b + ax$ per a certes constants $a, b \in \mathbb{R}$.