Càlcul Infinitesimal I / Càlcul I 09/10 (2n Q)

Continguts

Programa

(1) NOMBRES REALS

1.1 Nombres naturals i enters. El principi de inducció.

1.2 Nombres racionals: cos ordenat, arquimedià. Existència de irracionals.

1.3 Introducció axiomàtica dels nombres reals: principi d'encaix.(op)

1.4 Conjunts acotats. Existència de suprem i ínfim.

1.5 Algunes altres conseqüències dels axiomes.(op)

1.6 Valor absolut. Propietats.

1.7 Els símbols $\pm\infty$. Regles d'utilització.

(2) FUNCIONS REALS D'UNA VARIABLE.

(2A) Alguns resultats bàsics.

2.1 Domini.

2.2 Continuïtat.

2.3 Derivabilitat.

2.4 Aplicacions: creixement/decreixement, concavitat/convexitat, extrems relatius, inflexions,...

2.5 Fórmula de L'Hôpital.

(2B) Representació gràfica.

2.6 Simetries. Periodicitat.

2.7 Signes, zeros.

2.8 Continuïtat. Límits laterals.

2.9 Comportament a l'infinit: límits, asímptotes.

2.10 Derivabilitat. Derivades laterals, límits laterals de les derivades.

2.11 Intervals de creixement i decreixement. Extrems relatius.

2.12 Intervals de concavitat i convexitat. Inflexions.

2.13 Representació gràfica aproximada.

(3) L'ESPAI $\mathbb{R}^n$

(3A) Estructura algebraica i mètrica

3.1 L'espai vectorial $\mathbb{R}^n$

3.2 Producte escalar

3.3 Norma d'un vector

3.4 Distància

(3B) Dominis elementals

3.5 Boles.

(3C) Topologia elemental.

3.6 Punts interiors, frontera.

3.7 Conjunts oberts i tancats.

3.8 Subconjunts densos.(op)

3.9 Punts aïllats, d'acumulació.(op)

(3D) Altres nocions topològiques elementals.

3.10 Conjunts acotats.

3.11 Conjunts compactes.

(4) SUCCESSIONS

(4A) Funcions de variable discreta: successions reals.

4.1 Generalitats sobre els problemes plantejats: presentació directa i per recurrència.

4.2 Exemples elementals de successions.

4.3 Successions a $\mathbb{R}^n$.(op)

(4B) Límit d'una successió

4.4 Definicions: límit, successió convergent.

4.5 Unicitat del límit.

4.6 Existència: successions regulars o de Cauchy. Completitud de $\mathbb{R}^n$. (op)

4.7 Límits infinits, per a successions reals.

4.8 Classificació d'infinits i infinitèsims: ordre superior, mateix ordre, ordre r,... Algunes relacions bàsiques. (op)

4.9 Criteris de generació: operacions amb límits. Indeterminacions.

(4C) Estudi d'indeterminacions per a successions reals.

4.10 Fraccions racionals.

4.11 Indeterminació $\infty - \infty$.

4.12 Pas a variable contínua.

4.13 Reducció a algunes fórmules clàssiques: número e, Wallis, Stirling,... (op)

4.14 Criteris de monotonia.

4.15 Alguns altres criteris de convergència per a successions positives: Stolz, arrel i quocient, de la mitjana (aritmètica, geomètrica).

4.16 Límits de successions donades per recurrència.

(4D) Subsuccessions.

4.17 Subsuccessions, o successions parcials.

(5) FUNCIONS DE n VARIABLES

(5A) Funcions escalars (o reals)

5.1 Funcions escalars (o reals) de n variables.

5.2 Representació gràfica de funcions escalars de 2 variables: superfície de la gràfica, per corbes de nivell, por seccions paral.leles als plans coordenats.

5.3 Funcions "parcials": restricció a una sola variable, fixant les altres. (op)

5.4 Funcions elementals. El seu domini de definició.

5.5 Algunes observacions respecte a les funcions exponencials i trigonomètriques.

5.6 Altres formes de presentació: extensió a punts frontera, definides a trossos, ...

(5B) Funcions vectorials.

5.7 Funcions vectorials. Les seves funcions components.

5.8 Operacions elementals amb funcions vectorials: suma, producte escalar i vectorial, ...

5.9 Composició. Funcions bijectives. Funció inversa.

5.10 Diagrames de blocs.(op)

(6) CONTINUÏTAT I LÏMITS DE FUNCIONS

(6A) Definicions

6.1 Funcions contínues.

6.2 Límit d'una funció en un punt. Unicitat.

6.3 Límits i continuïtat.

6.4 Visualització per les corbes de nivell.(op)

6.5 Discontinuïtats evitables. Extensió contínua a punts frontera del domini de definició.

6.6 Límits laterals per a funcions d'una variable. Discontinuïtats de salt i de segona espècie.

6.7 Límits infinits (per a funcions reals) i a l'infinit (per a funcions d'una variable).

6.8 Classificació d'infinits i d'infinitèsims. (op)

(6B) Càlcul de límits i criteris de continuïtat

6.9 Reducció a funcions components.

6.10 Criteri de generació, operacions amb límits; indeterminacions.

6.11 Criteris de majorització i monotonia.

6.12 Límits segons subconjunts, rectes.

6.13 Límits reiterats.

6.14 Criteri de les coordenades polars.

6.15 Canvi de variables.

(6C) Alguns teoremes fonamentals sobre funcions contínues.

6.16 Funcions contínues sobre compactes. Existència i accessibilitat d'extrems absoluts.

6.17 Teorema de Bolzano per a funcions reals de variable real. Teorema del valor intermig. Imatge d'un interval per una funció monòtona contínua.

6.18 Antiimatges d'oberts i tancats per funcions contínues. Aplicació a l'estudi de conjunts definits per equacions i inequacions.

(7) DERIVACIÓ

(7A) Funcions de classe C^k o regulars

7.1 Derivada d'una funció real de variable real en un punt. Interpretació geomètrica.

7.2 Derivada parcial d'una funció escalar en un punt.

7.3 Interpretació com derivades de les funcions parcials. Interpretació geomètrica.

7.4 Funcions derivades parcials. Regles de derivació "respecte a cada variable". Funcions de classe C^1.

7.5 Derivades d'ordre superior. Funcions de classe C^k i de classe C^∞ (llises).

7.6 Fórmula de Leibnitz per a la derivada k-èsima del producte de dues funcions.

7.7 Igualtat de les derivades creuades.

7.8 Derivació de funcions vectorials i matricials: definicions; reducció a les components; matriu Jacobiana.

(7B) Regla de la cadena

7.9 Derivada de la composició: regla de la cadena.

7.10 Derivades parcials de la composició de funcions.

7.11 Aplicació a la resolució d'equacions diferencials en derivades parcials.(op)

(7C) Derivades direccionals. Fórmula del gradient

7.12 Derivades direccionals en un punt. Interpretació geomètrica.

7.13 Gradient d'una funció escalar. Fórmula del gradient per a la derivada direccional.

7.14 Derivada direccional màxima.

7.15 Aplicació: camp de forces derivat de potencial (superfícies equipotencials, línies de força,...)

7.16 Relacions entre continuïtat, derivabilitat i classe C^1.

7.17 Fórmula d'Euler per a funcions homogènies.(op)

(8) TEOREMES D'APROXIMACIÓ. LA FÓRMULA DE TAYLOR.

(8A) Teorema de l'increment finit.

8.1 Funcions d'una variable: lema de Rolle, teorema del valor mig o de l'increment finit.

8.2 Aplicacions: creixement, decreixement, regla de l'Hôpital.

8.3 Funcions de varies variables: teorema de l'increment finit.

8.4 Aplicacions elementals: fórmula de l'error en el càlcul numèric.

(8B) Fórmula de Taylor per a funcions d'una variable.

8.5 Plantejament del problema: aproximacions locals per polinomis.(op)

8.6 Fórmula de Taylor per a funcions d'una variable.

8.7 Interpretació geomètrica.

8.8 Expressió del residu: Lagrange.

8.9 Exemples elementals: exponencial, sinus, cosinus, binòmica,...

8.10 Càlcul del desenvolupament de Taylor per generació: suma, producte, quocient, composició, inversa, derivada, primitiva.

8.11 Aplicació al càlcul de límits.

8.12 Altres aplicacions elementals: valors aproximats, càlcul de derivades, verificació d'extrems relatius i inflexions.

(8C) Fórmula de Taylor per a funcions de n variables

8.13 Fórmula de Taylor per a funcions de n variables.

8.14 Interpretació geomètrica. (op)

8.15 Acotació del residu.

8.16 Càlcul del desenvolupament de Taylor per generació.

8.17 Aplicacions elementals: valors aproximats, càlcul de límits, càlcul de derivades,...

8.18 El mètode de Newton per buscar zeros de funcions.(op)

(9) TEOREMA DE LA FUNCIÓ INVERSA

9.1 Teorema de la funció inversa.

9.2 Distinció entre inversibilitat local i “global”.

9.3 Cas particular de funcions d’una variable.

(10) TEOREMA DE LA FUNCIÓ IMPLÍCITA

10.1 Definició de funció implícita: global, local.

10.2 Interpretació de termes de “variables governables”. Exemple: fenòmens d’histèresi.

10.3 Equacions lineals aproximades. Les funcions implícites que defineixen.

10.4 Teorema de la funció implícita.

10.5 Derivació de funcions implícites.

10.6 Algunes generalitzacions del teorema.(op)

10.7 Dependència funcional.(op)

(11) EXTREMS

11.1 Definicions: extrems absoluts, relatius.

11.2 Estudi dels extrems relatius a través de les derivades.

11.3 Interpretació geomètrica.

11.4 Criteris per a la determinació del signe d’una forma quadràtica.(op)

11.5 Casos particulars: $n = 2$,...

11.6 Extrems lligats amb restriccions lineals.

11.7 Aplicació a l’estudi d’extrems absoluts sobre políedres. Estratificació del domini.

(12) APLICACIONS

12.1 Circuits iterats.

12.2 Punt de disrupció de la màquina de Zeeman.

12.3 Resolució d’EDP per canvi de variables.

12.4 Anàlisi cinemàtica d’un braç articulat.

12.5 Anàlisi cinemàtica d’un mecanisme amb enllaços.

12.6 Càlcul de l’acceleració d’un flux.

12.7 Velocitat i acceleració de l’ombra d’un mòbil sobre una pantalla.

12.8 Potencial controlat implícitament.

12.9 Despatx elèctric.

12.10 Variació unitària òptima dels paràmetres de configuració d’una funció de cost.

12.11 Alçada d’un penjoll si la corda te un extrem fix i l’altre lliscant en un ganxo.

12.12 Estabilitat d’una ampolla mig plena.

12.13 Problema de la llei de Snell.

12.14 Problema de l’escola.

OBJECTIUS DE CÀLCUL INFINITESIMAL I Una de les idees clau en les disciplines tècniques és la de l'aproximació: aproximar problemes complexes per altres més senzills, tot esperant que les solucions d'aquests siguin solucions aproximades dels inicials. Aquesta idea és també ben present a les Matemàtiques, i en particular a les Matemàtiques tècniques.

Pretenem mostrar en aquesta introducció que aquest punt de vista permet a l'estudiant contemplar l'Algebra Lineal, el Càlcul Diferencial, les Sèries de Potències, el Càlcul Numèric, etc., no com matèries desconnectades entre sí, sinó com a diferents peces d'un mateix pla de treball consistent a trobar formes sistemàtiques de reduir els problemes a models senzills aproximats.

Pensem que aquesta visió pot fer més clars els objectius i les motivacions de cada part, i les relacions entre elles, i per tant fer-les més entenedores.

Metòdica d'aproximació de funcions per models El mètode d'aproximació per models comprèn dos grans blocs de treball. D'una banda, *l'estudi dels models* bàsics, és a dir, dels casos senzills als quals intentarem reduir els complexes. D'una altra banda, les tècniques d'aproximació, que alhora inclouen dos processos: primer, *obtenir un model* senzill que aproximi al donat; segon, verificar si la solució d'aquest model senzill pot considerar-se efectivament una *solució aproximada de l'inicial.* Concretant més, per a nosaltres els objectes a aproximar i els models de referència seran, la major part de les vegades, funcions. En efecte, el problema a estudiar estarà expressat matemàticament en termes de funcions, que caldrà integrar, invertir, trobar-ne els zeros, etc. Aleshores, la metòdica general de procedir per aproximació mitjançant models senzills, es concretarà en tres passos:

(1) aproximar les funcions que apareixen en la formulació del problema per altres més senzilles.

(2) resoldre el problema que resulta de substituir les funcions inicials per les seves aproximacions

(3) verificar fins a quin punt la solució d'aquest problema simplificat és efectivament una solució aproximada de l'inicial

De forma molt esquemàtica, podríem dir que l'Algebra s'ocupa de (2), mentre que el Càlcul ho fa de (1) i (3). Igualment, el Càlcul Numèric es centrarà en buscar mètodes constructius que ens permetin calcular aquestes aproximacions i usar-les en la resolució efectiva del problema.

Precisem-ho una mica més.

Estudi dels models de referència

Una de les famílies de funcions més utilitzades com a models de referència són els *polinomis.* Òbviament, resulten tant més fàcils d'operar com menor sigui el grau i el nombre de variables. És per això que a les assignatures d'Algebra l'estudiant treballarà essencialment amb els següents tres tipus:

a) grau 1 (aplicacions lineals): amb diverses variables, i a valors vectorials.

b) grau 2 (formes quadràtiques): amb diverses variables, i a valors escalars.

c) grau qualsevol: una sola variable, i a valors escalars.

A aquests models de funcions se'ls associarà de forma natural (com a conjunt de zeros d'una tal funció) els corresponents *models geomètrics*:

a') rectes, plans,... (en general, varietats lineals de qualsevol dimensió)

b') còniques i quàdriques

No cal dir que no són aquests els únics models utilitzats. Per exemple, en integració es prenen com a funcions models les *esgraonades*, tal com es veu a Càlcul II. Igualment, sovint les funcions *sinusoidals* s'utilitzen com a models de vibracions.

Tècniques d'aproximació

En l'aproximació per polinomis poden plantejar-se dues possibilitats ben diferents per afinar l'aproximació:

i) *aproximació global*: augmentar el grau del polinomi tant com calgui, tot mantenint el domini d'aproximació

ii) *aproximació local*: reduir el domini d'aproximació tant com calgui, tot mantenint baix el grau del polinomi.

Així, els desenvolupaments en sèrie que s'estudien a Càlcul II són aproximacions del primer tipus. Naturalment, com que s'utilitzen models del tipus (c) anterior, només l'aplicarem a funcions reals d'una variable.

El segon és la idea central del Càlcul Diferencial. En parlarem amb més detall als apartats següents.

Per descomptat, és possible combinar ambdós plantejaments, en diverses proporcions. Això és el que es fa, per exemple a les fórmules de Newton-Cotes per a integració numèrica.

Càlcul Infinitesimal I

El Càlcul Diferencial es podria caracteritzar com l'estudi de funcions mitjançant la seva aproximació local per aplicacions lineals (o quadràtiques,...)

Un exemple típic n'és el teorema de la funció inversa. En efecte, considerem el problema d'esbrinar si una funció donada és bijectiva, i trobar-ne la inversa si és el cas. Fins i tot per a funcions elementals, el problema és inabordable directament. Però seguint els tres passos assenyalats al començament, el teorema de la funció inversa ens dona una via d'avenç en un cert entorn d'un punt prefixat:

(1') Es considera l'aplicació lineal F que aproxima localment la donada f.

(2') Es verifica si aquesta aproximació lineal F és bijectiva (p.e., si el determinant és no nul), i en aquest cas es calcula la seva inversa F^{-1} (p.e., invertint la seva matriu)

(3') El teorema de la funció inversa assegura aleshores que:

- també f és bijectiva, en un cert entorn del punt considerat.
- F^{-1} es l'aproximació lineal, sempre en un cert entorn del punt considerat, de la inversa de f que buscàvem.

L'assignatura Càlcul Infinitesimal I és una introducció al Càlcul Diferencial, i en particular a les aproximacions de primer i segon ordre. Pel que fa a les aproximacions de primer ordre (lineals), això comprén:

- precisar qué vol dir que una aplicació lineal aproxima localment a una funció
- caracteritzar quan una funció pot ser aproximada d'aquesta manera.
- en tal cas, determinar aquesta aproximació lineal.
- esbrinar quines propietats d'aquesta aproximació lineal poden ser traslladades a la funció donada, i fins a quin punt la solució del problema lineal aproximat és una solució aproximada del problema inicial.

Com hem dit abans, les aproximacions locals de segon ordre (per formes quadràtiques) només es veuen per a funcions amb valors escalars. Una important aplicació és l'estudi d'extrems relatius: si la forma quadràtica que l'aproxima presenta un màxim (o mínim), també ho fa la funció inicial.

Càlcul Diferencial

La mateixa tècnica d'aproximació local per aplicacions lineals (o quadràtiques), s'utilitzarà en altres assignatures.
Així, per a l'estudi local de corbes i superfícies a *Geometria*, es considera les seves aproximacions per varietats lineals (tangents) o quadràtiques, en un entorn del punt en qüestió. Si aquestes corbes i superfícies venen donades com a conjunts de zeros de funcions, l'aproximació geomètrica es tradueix en aproximació de funcions:

- si una superfície ve donada com el conjunt de zeros d'una funció, el seu pla (respec. quàdrica) tangent en un punt no és més que el conjunt de zeros de l'aplicació lineal (respec. quadràtica) que aproxima la funció donada en un entorn del punt considerat

- el mateix pot dir-se de la recta tangent a una corba.

Amb això l'estudi de certs problemes geomètrics locals d'una superfície (corba,...) es redueix al de la seva aproximació lineal, és a dir, del seu pla (recta,...) tangent. Per exemple:

- la recta normal a una superfície en un punt coincideix amb la recta normal al pla tangent en el mateix punt

- si dues superfícies es tallen segons una corba, aleshores la recta tangent a aquesta corba no és més que la intersecció dels plans tangents a les superfícies donades.

Igualment, l'estudi de les curvatures es redueix al de les aproximacions quadràtiques.

Un exemple paradigmàtic

Afegim encara un darrer exemple d'utilització de la metòdica de resolució per aproximació lineal local. Es tracta de l'estudi de l'estabilitat del regulador centrífug de Watt, que pot considerar-se el punt de partida de la *regulació automàtica* per realimentació. Aquest regulador s'havia comportat adequadament a finals dels segle XVIII, i durant la primera meitat del XIX. Però els canvis de disseny al llarg de la segona meitat del XIX el feien més i més inestable. L'enginyer Vyshnegradskiy (1876) va trobar les causes d'aquesta inestabilitat, i la manera d'evitar-la. Vegem com les seves conclusions poden ser retrobades mitjançant la tècnica d'aproximació lineal local.
El comportament del regulador de Watt ve donat per un sistema d'equacions diferencials, al qual podem aplicar una metòdica anàloga a la que venim explicant:

(1") substituïm les funcions que hi apareixen per les seves aproximacions lineals locals (en un entorn del punt d'equilibri que correspon al règim permanent desitjat).

(2") estudiem l'estabilitat del sistema d'equacions diferencials lineals així obtingut; resulta que es redueix a un problema algebraic (que un determinat polinomi tingui arrels negatives).

(3") la teoria general ens assegura que l'estabilitat d'aquest sistema lineal implica també la del sistema inicial.

Haurem trobat així condicions suficients per a garantir l'estabilitat del regulador de Watt, que resulten ser precisament les famoses tesis de Vyshnegradskiy.

Programació. (Començament del curs: 15-02-2010; final del curs: 04-06-2010)

Setmanes	Grups Grans			Grups Petits	
1	1	1	3	2	2
2	3	4	4	2	2
3	4	5	5	2	2
4	6	6	6	1	1
5	6	6	6	4	4
6	6	7	7	4	4
7	–	7	7	6	6
8	7	–	–	6	–
9	7	7	8	6	7
10	8	8	8	7	7
11	8	8	8	7	7
12	9	9	9	8	8
13	10	10	10	8	8
14	–	10	11	8	8
15	11	11	11	8	8

Bibliografia bàsica

- Dept. Matemàtica Aplicada I: Teoria de Càlcul I. Barcelona, CPDA-ETSEIB, 2001.
- Spivak, M.: Calculus. Cálculo infinitesimal. Reverté S.A.
- Clotet,J.; Ferrer,J.; García,I.: Càlcul Diferencial d'una i diverses variables. Problemes resolts. Edicions UPC, 2000.
- Spiegel,M.R.: Cálculo Superior. Madrid, McGraw-Hill (Schaum), 1991.
- Dept. Matemàtica Aplicada I: Càlcul I. Exàmens i tests resolts. Barcelona, CPDA-ETSEIB, 1999.

Bibliografia complementària

- Apostol,T.M.: Análisis matemático. Barcelona, Reverté, 1991.
- Mazón Ruiz, José M.: Cálculo Diferencial. Teoría y problemas. McGraw-Hill. 1997.
- Fleming,W.: Funciones de varias variables. México, Compañía Continental, 1981.
- Ortega Aramburu, J.M.: Introducció a l'anàlisi matemàtica. Ed: Publicacions de la U.A.B.

Observacions

- En els exàmens es podrà dur i consultar un full formulari personal, i una taula de primitives. També es podran dur els problemes del tema 12 manuscrits. En canvi, no és permès de dur calculadora.
- *, **, indica el grau de dificultat del problema.
- Una R indica que el problema es troba a la corresponent col.lecció de problemes resolts.

1. Nombres Reals

1. Trobeu el suprem i l'ínfim dels següents subconjunts, indicant si són màxim o mínim respectivament

$$A = \{x \in \mathbb{R}, \quad 0 < x^2 \le 2\}, \qquad B = \left\{\frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}\right\},$$
$$C = \{x \in \mathbb{R}, \quad 0 < (x-2)^2 \le 3\}, \qquad D = \left\{\frac{1}{3^q}, \quad q \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. Determineu el suprem i l'ínfim del conjunt $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \le |x-3|\}$.

3. Trobeu el suprem i l'ínfim (si existeixen) dels següents conjunts de $\mathbb{R}$, indicant si són màxim o mínim respectivament:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 \le 0\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| < |x-4|\}$$

4. Determineu el suprem i l'ínfim, si n'hi ha, del conjunt $A = \left\{x < 0 : \dfrac{|x+3|}{x} \ge -\dfrac{1}{2}\right\}$.

5. Discutiu, en funció de $\alpha \in \mathbb{R}$, el suprem i l'ínfim del conjunt $\left\{x \ne -1 : \dfrac{|\alpha x|}{x+1} > 1\right\}$.

6. * Proveu que si $a, b \in \mathbb{R}$ amb $a < b$, aleshores:

i) existeix $\alpha \in \mathbb{Q}$, tal que $a < \alpha < b$,

ii) existeix $\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, tal que $a < \beta < b$.

7. En una batalla han participat 4000 homes. Dels supervivients, el $56,\overset{\frown}{56}\,\%$ no fuma i el $56,7\overset{\frown}{56}\,\%$ no beu. Quants homes han mort ?

8. R* Verifiqueu si $\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$ és un nombre enter.

(Tingueu en compte que $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, escolliu uns a i b adequats i fixeu-vos que l'expressió de ab és senzilla).

9. * Siguin $a, b \in \mathbb{N}$. Demostreu que $\sqrt{2}$ està comprès entre $\dfrac{a}{b}$ i $\dfrac{a+2b}{a+b}$.

10. R Proveu per inducció que $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$, per a $n \in \mathbb{N}$ amb $n \ge 1$.

11. Proveu per inducció respecte de n que $n^k + (n-1)^k + (n-2)^k + \ldots + 2^k + 1^k \le n^{k+1}$ per a $k \in \mathbb{N}$ amb $k \ge 0$ i $n \in \mathbb{N}$ amb $n \ge 1$.

12. Proveu per inducció que $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n}) = \dfrac{1 - x^{2^{n+1}}}{1-x}$, per a $n \in \mathbb{N}$ amb $n \ge 0$ i $x \ne 1$.

13. * Proveu per inducció respecte de n que $\begin{pmatrix} n+k \\ n+1 \end{pmatrix} \le k^{n+1}$, per a $k \in \mathbb{N}$ amb $k \ge 1$ i $n \in \mathbb{N}$ amb $n \ge 1$.

14 . Proveu per inducció respecte de n que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} ab^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} a^n ,$$

on a i b són números reals.

15 . Proveu per inducció que $1 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + \ldots + n \cdot 5^n = \dfrac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}$ per a $n \in \mathbb{N}$ amb $n \geq 1$.

16 . Donats $a, b \geq 0$, proveu la següent desigualtat per a $n \in \mathbb{N}$ amb $n \geq 1$

$$na^{n-1}b \leq (n-1)a^n + b^n.$$

17 . * Proveu que si $n \in \mathbb{N}$ amb $n \geq 0$ i $p \in \mathbb{N}$ amb $p \geq 1$, aleshores:

$$n^p < \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{p+1} < (n+1)^p .$$

18 . ** Proveu que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{n} k^p$, per a $n \in \mathbb{N}$ amb $n \geq 2$ i $p \in \mathbb{N}$ amb $p \geq 1$.

19 . Demostreu per inducció les fórmules següents:

(i) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$, per a $n \in \mathbb{N}$ amb $n \geq 1$.

(ii) $\left(1+\dfrac{1}{1}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2 \cdots \left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \dfrac{n^{n-1}}{(n-1)!}$, per a $n \in \mathbb{N}$ amb $n \geq 2$.

2. Funcions d'una variable

1 . Determineu el domini de definició de les funcions

a) $f(x) = \ln\ln\ln x$. b) $g(x) = \sqrt{\ln x}$. c) $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$. d) $\sqrt{|x+5| - |x-1|}$

2 . Recordant que $E(x) = \sup\{z \in \mathbb{Z} \,/\, z \leq x\}$, representeu el gràfic de les següents funcions:

a) $E(x^2)$. b) $E(\sqrt{x})$. c) $3 - |2x - |3 - 2x||$.

3 . * A partir del de $\sin x$ i $\cos x$, deduïu el gràfic aproximat de

a) $\dfrac{\sin x}{|\cos x|}$. b) $\sin \dfrac{1}{x}$.

4 . * A partir del de $\sin \dfrac{1}{x}$, determineu el gràfic aproximat de

a) $x \sin \dfrac{1}{x}$. b) $x^2 \sin \dfrac{1}{x}$. c) $2x^2 + x^2 \sin \dfrac{1}{x}$. d) $2x + x \sin \dfrac{1}{x}$.

5 . Calculeu els següents límits:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|\,x\,|}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^4}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x) E(x)$.

(E és la funció part entera).

6 . Calculeu les funcions derivades de

(a) $f(x) = \ln \sin \sqrt[3]{\arctan e^{3x}}$. b) $f(x) = 10^{1-\sin^4 3x}$.

7 . Calculeu les funcions derivades de

(a) $f(x) = e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$. b) $f(x) = (x^x)^x$.

8 . Quin angle formen, en el punt de tall, la hipèrbola $y = \dfrac{1}{x}$ i la paràbola $y = \sqrt{x}$?

9 . a) Proveu que si $x \geq 1$, aleshores $2\arctan x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$ és constant. Trobeu el valor d'aquesta constant.

*b) Estudieu si també és constant en $[0, 1[$.

10 . Trobeu els extrems relatius i absoluts de $f(x) = \sin 2x - x$ en $[-\pi/2, \pi/2]$.

11 . Trobeu els extrems relatius i absoluts de $f(x) = \dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{1-x}$ en $]0, 1[$, $a > 0$, $b > 0$.

12 . Trobeu els valors de a i b per als quals $f(x) = a\ln x + bx^2 + x$ té extrems en $x = 1$ i $x = 2$. De quin tipus són?

13 . La distància de separació ℓ entre cotxes viatjant en un túnel d'un sol carril és relacionada amb la seva velocitat mitjana v per $\ell = 18 + v + \dfrac{v^2}{32}$. Quants cotxes passen per un punt donat cada hora? Per a quina velocitat el volum és màxim?

14 . Determineu el mínim $K \in \mathbb{R}$ tal que $x - x^2 \le Ke^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

15 . Calculeu els límits a) $\lim\limits_{0^+} \sin x \ln x$, b) $\lim\limits_{x\to 0} x\, e^{x^{-2}}$.

16 . Calculeu les asímptotes de les funcions

a) $f(x) = \sqrt[4]{x^4 - x^3}$. b) $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$.

c) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$. * d) $f(x) = \sqrt{x(x+4)}$.

En els següents exercicis, estudieu i representeu el gràfic de les funcions

17 . $f(x) = e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}$.

18 . * $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$.

19 . $f(x) = \arcsin \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

20 . $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x^2 - 1}$, $x \neq 1$, $f(1) = 1/2$.

a) Proveu que només té un extrem en $x = 1$.

b) Estudieu f i feu-ne la gràfica.

21 . $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

22 . $f(x) = xe^{-1/x^2}$, $x \neq 0$; $f(0) = 0$.

23 . ** $f(x) = (x^2)^x$, $x \neq 0$; $f(0) = 1$.

a) Calculeu els seus extrems.

b) Proveu que té un punt d'inflexió en $x = 0$ de pendent vertical, i un altre x^*. Siitueu aquest últim.

c) Feu la gràfica de f.

24 . $f(x) = \ln(x^2 - 1) + \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

25 . $f(x) = (x - 1)e^{x/(x-1)}$, $x \neq 1$.

26 . $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$.

3. L'espai $\mathbb{R}^n$

1 . Demostreu que

(a) $\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \dfrac{1}{2}\,, \quad \forall\,(x,y) \neq (0,0)\,.$

(b) $\|\, x \,\| + \dfrac{1}{\|\, x \,\|} \geq 2\,, \quad \forall\, x \neq 0\,.$

2 . Digueu si són oberts o tancats els conjunts següents:

$$\begin{aligned}
A &= \{(x,y)\ :\ x,y \geq 0\,;\ x+y \leq 1\} \\
B &= \{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leq 1\,;\ x \neq y\} \\
C &= \{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leq 1\,;\ x^2-2x+y^2 < 0\} \\
D &= \{(x,y,z)\ :\ x^2+y \leq 1\,;\ z = 0\}
\end{aligned}$$

3 . En $\mathbb{R}^2$ es consideren els següents conjunts:

$$\begin{array}{rcl}
A & = & \{(x,y)\ :\ 1 < x^2+y^2 < 2\} \\
B & = & \{(x,0)\ :\ x \geq 0\} \\
C & = & \{(x,y)\ :\ 1 < x < \sqrt{2}\}\,.
\end{array}$$

(a) És $A - C$ tancat?

(b) És $A - B$ obert?

(c) És A compacte? I $\overline{C}$, és compacte?

(d) $C - A$, és tancat? $\overline{C - A}$.

4 . Estudieu si són acotats els conjunts de $\mathbb{R}^2$:

(a) $x^2 - 2x + y^2 \geq 0$.

(b) $x^2 - 2x + y^2 \leq 0$.

(c) $x^2 - 2x - y^2 \geq 0$.

(d) $x^2 - 2x - y^2 \leq 0$.

5 . Estudieu si és compacte el conjunt

$$x^2 + y^2 \leq x\,, \qquad x^2 - y^2 \geq y\,.$$

6 . * Estudieu si és acotat el conjunt de $\mathbb{R}^3$ definit per

$$x^3 + x^2y^2 = z^2, \quad 0 \leq y \leq 4, \quad x \leq 2\,.$$

4. Successions

1 . Aplicant la definició de límit, calculeu $p_0(\varepsilon)$ per a la successió $\dfrac{p+1}{p+2} \longrightarrow 1$.

2 . Aplicant la definició de límit, calculeu $p_0(k)$ per a la successió $\dfrac{p^2}{2p-1} \to +\infty$.

3 . Estudieu la convergència de les successions

$$\frac{n^2+4}{3n^2-n}\,, \qquad \frac{n+3}{n^3-6}\,, \qquad \frac{n^4+n^2}{n^3-n+27}\,.$$

4 . Estudieu la convergència de les successions

$$\sqrt{(n-1)(n+7)}-n\,, \qquad \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}\,, \qquad \left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-n\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2n}\right)\,.$$

5 . Estudieu la convergència de

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+3}\,, \qquad \left(1+\frac{2}{n}\right)^{7n}\,, \qquad \left(\frac{5n+2}{15n-4}\right)^{\dfrac{3n+4}{9n-6}}\,.$$

6 . Estudieu la convergència de

$$\sqrt[n]{2}\,, \qquad \sqrt[n]{n^2-7}\,, \qquad \sqrt[n]{\ln n}\,, \qquad \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{n^7-2}}\,.$$

7 . Estudieu la convergència de les successions

$$\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}\,, \qquad \frac{1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}}{n}\,, \qquad \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n}}\,.$$

8 . Estudieu la convergència de les successions

$$\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(n+2)!}\,, \qquad \frac{\sin\alpha+2^2\sin\dfrac{\alpha}{2}+\ldots+n^2\sin\dfrac{\alpha}{n}}{n^2}\,.$$

9 . Trobeu la relació que hi ha d'haver entre a i b perquè

$$\text{lím}\left(\frac{n+a}{n+2}\right)^{an+b} = \text{lím}\left(\frac{n+b}{n+1}\right)^{2n+a}\,.$$

10 . Siguin $a, b > 0$. Calculeu $\text{lím}\,\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ segons els valors de a i b .

11 . ** Siguin $a, b \in \mathbb{R}$, amb $0 < a < b$. Definim les successions (u_n) i (v_n) per :

$$\begin{aligned} u_0 &= a\,, & v_0 &= b\,, \\ u_{n+1} &= \sqrt{u_n v_n}\,, & v_{n+1} &= \frac{u_n+v_n}{2} \quad \text{per a} \quad n \geq 0\,, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

i) Demostreu que $\forall\, n \geq 0$

$$u_0 \leq u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n \leq v_0 \,.$$

Deduiu que les successions (u_n), (v_n) són convergents.

ii) Demostreu que $v_n - u_n \leq \dfrac{v_0 - u_0}{2^n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Deduïu que les successions (u_n) i (v_n) tenen mateix límit.

12 . ** Siguin $k > 0$ i $a > 0$. Definim la successió (x_n) per $x_0 = a$ i $x_{n+1} = \dfrac{k}{1 + x_n}$, $n \geq 0$. Demostreu que les subsuccessions dels termes parells i dels termes senars són, una creixent i l'altra decreixent. Proveu que són convergents i que tenen el mateix límit. Calculeu-lo.

13 . Estudieu la convergència de les següents successions:

$$a_n = \left(\frac{2n^4+5}{n^4}, \quad \sqrt[n]{n+7}\right), \qquad b_n = \left(\frac{1}{3n}, \quad \frac{1}{n^2}\right), \qquad c_n = \left(\sin\frac{1}{n}, \quad \frac{2n+1}{n+3}\right),$$

$$d_n = \left(\sqrt[n]{8}, \quad \frac{3\sin n}{n^2}, \quad \frac{2n^3+4}{n^3+5}\right), \qquad e_n = \left(\frac{n^2+3}{n}, \quad \frac{n^2-3}{n^2}\right),$$

$$f_n = \left(\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}, \quad \sqrt[n]{n+3}, \quad \frac{\sin 3n}{n^2}\right)$$

14 . Essent $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ una successió en $\mathbb{R}$, proveu que si $\lim x_p = L$, aleshores $\lim \| x_p \| = \| L \|$. Trobeu un contraexemple per al recíproc.

15 . * Siguin $a, m, M \in \mathbb{R}$ i (a_n) , (b_n) successions de nombres reals, $a_n \geq a$, tals que $0 < m \leq b_n \leq M$, $\forall\, n$. Definim $c_n = a + (-1)^n b_n (a_n - a)$. Proveu que: (c_n) és convergent $\Longleftrightarrow$ (a_n) és convergent i $\lim a_n = a$.

16 . Sigui (x_n) una successió de nombres reals. Proveu que:

i) (x_{2n}) , (x_{2n+1}) són convergents i tenen el mateix límit ℓ $\Longleftrightarrow$ (x_n) és convergent i té límit ℓ.

*ii) si (x_{2n}) , (x_{2n+1}) , (x_{3n}) convergeixen, també convergeix (x_n) i els límits de totes quatre coincideixen.

5. Funcions vectorials de diverses variables

1 . Representeu per corbes de nivell les funcions:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$. (b) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$. (c) $f(x,y) = x^2 - y^2$.

2 . Representeu per corbes de nivell les funcions:

(a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. (b) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

3 . * Considereu les corbes de nivell $C_\lambda = \{(x,y) : f(x,y) = \lambda\}$ de la funció: $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2-2x}$

(a) Representeu C_λ per als següents valors particulars de λ: $1;\ 2, 11;\ -1, -9;\ 1/4, 1/2, 3/4$.

(b) Vegeu que, en general, C_λ és una circumferència de centre $\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-1}, 0\right)$, i tangent a l'eix vertical.

4 . Considereu la funció $f(x,t) = \sin(x - vt)$

(a) Representeu les funcions parcials per a $t = 0, 1, 2, \ldots$.

(b) Deduïu una interpretació física de f.

(c) Interpreteu les funcions parcials per a $x = x_0$.

5 . Considereu la funció $T = \dfrac{PV}{nR}$ (P, pressió; V, volum; T, temperatura absoluta; n, R, constants)

(a) Representeu la gràfica (superfície) aproximada.

(b) Representeu les funcions parcials.

(c) Representeu les corbes de nivell.

(d) Sobre aquest darrer gràfic, representeu les transformacions isòbara i isoterma que, partint del punt $P = 1$, $V = 1$, redueix el volum a la meitat.

6 . Determineu el domini de definició de les funcions:

(a) $f(x) = \left(\ln\ln\ln x,\ \sqrt{\ln x},\ \dfrac{x+1}{x^2-4}\right)$. (b) $g(x,y) = \left(\ln xy,\ \sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$.

7 . Si $f(x) = x^2 + 1$, doneu una fórmula explícita per a $f \circ f - f^2$.

8 . Essent $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ i f^{-1} la seva inversa (respecte a la composició), digueu quina de les següents igualtats es verifica:

(a) $f^{-1} = f$. (b) $f^{-1} = -1/f$. (c) $f^{-1} = 1/f$. (d) $f^{-1} = x/f$.

9 . Si $f(x) = x + 1$, doneu fórmules explícites per a les funcions

(a) $f \circ f - f^{-1}$. (b) $\dfrac{f + f^{-1}}{f - f^{-1}}$.

10 . Essent $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, doneu fórmules explícites per a les funcions

(a) $f \circ f$. (b) f^{-1}. (c) $(1-f)^{-1} f^{-1}$. (d) $f \circ (1-f)$. (e) $g(x) = \dfrac{1-f}{2}(2x)$.

11 . Considereu la funció $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida per $f(x, y) = (x + y, x - y)$

(a) Comproveu que $f \circ f \circ f = 2f$.

(b) Comproveu que f és bijectiva, i que $f^{-1} = f/2$.

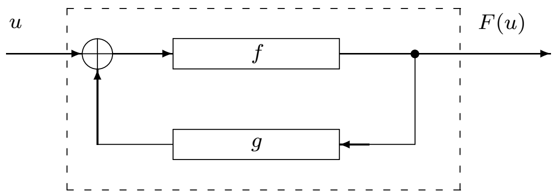
12 . Considereu les funcions

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}\,, & g(x,y,z) = (z^2 - xy - y^2, z^2 - xy - x^2)\,, \\ h(x,y) = (x,y,x+y) & ,F = f \circ g \circ h\,. \end{array}$$

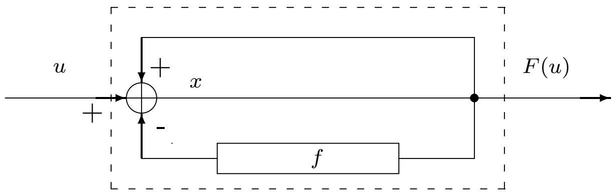
(a) Determineu el domini de definició de f i de F.

(b) Determineu els punts per als quals $f = F$.

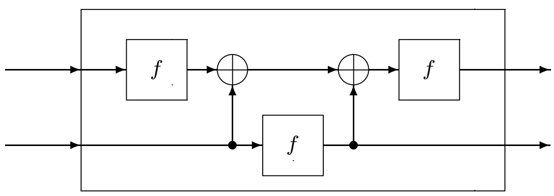
13 . * Demostreu que en l'esquema de realimentació de la figura, es verifica $F = f \circ (\mathrm{Id} \; - g \circ f)^{-1}$:



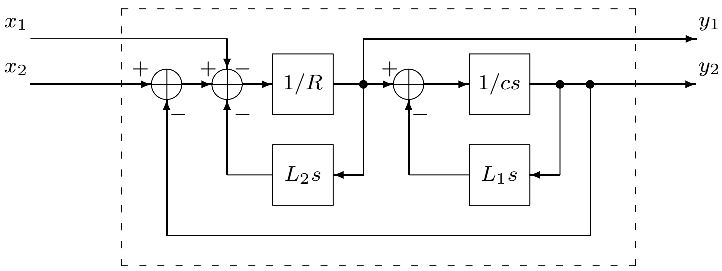
14 . * Expresseu, en termes de f, la funció F de l'esquema:



15 . * Si $f(t) = \frac{1}{t}$, determineu el domini de definició i les components de la funció donada per l'esquema:



16 . ** En l'esquema de la figura, els blocs representen "multiplicar per", és a dir: $\xrightarrow{u}\boxed{\lambda}\xrightarrow{v}$ $v = \lambda u$. Trobeu les expressions de y_1, y_2 en funció de x_1, x_2:



6. Continuïtat i límits de funcions

1 . Sigui $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida per $f(x)=\begin{cases} \exp x & \text{si} \quad x<0 \\ x+a & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$.

Com s'ha d'escollir a perquè la funció sigui contínua ?

2 . Sigui $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida per $f(x)=\begin{cases} -2\sin x & \text{si} \quad x\leq -\dfrac{\pi}{2} \\ A\sin x+B & \text{si} \quad -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si} \quad x\geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

Com s'han d'escollir A i B perquè f sigui contínua ?

3 . Estudieu la continuïtat de $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\ln|x|} & \text{si} \quad x\neq 0,\,1,\,-1 \\ 0 & \text{si} \quad x=0,\,1,\,-1. \end{cases}$

4 . Estudieu la continuïtat de $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+2^{\tan x}} & \text{si} \quad x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\,, \quad k\in\mathbb{Z}\,, \\ 0 & \text{si} \quad x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,, \quad k\in\mathbb{Z}\,. \end{cases}$

5 . Sigui $f(x)=\dfrac{x-1}{2(x+1)}$. És clar que $\lim\limits_{3} f=\dfrac{1}{4}$. Doneu un valor de δ per tal que si $\mid x-3\mid<\delta$ llavors $\mid f(x)-\dfrac{1}{4}\mid<0.01$.

6 . Sigui $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}$. És clar que $\lim\limits_{+\infty} f=1$. Doneu un valor de M per tal que si $x>M$ llavors $\mid f(x)-1\mid<\varepsilon$.

7 . * Sigui $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida per

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x=0\,, \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x\in\mathbb{Q}-\{0\}\,, \\ x & \text{si} \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

i) Proveu que f és una aplicació bijectiva.

ii) Proveu que f només és contínua en dos punts.

8 . Sigui $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(\alpha x)=\alpha f(x)$, $\forall\,\alpha,x\in\mathbb{R}$. Proveu que f és contínua en $\mathbb{R}$.

9 . Sigui $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$. Proveu, aplicant directament la definició, que f és contínua en $(0,0)$.

10 . És fals que si $\lim\limits_{a} f=b$ i $\lim\limits_{b} g=\ell$, llavors $\lim\limits_{a} g\circ f=\ell$. Doneu un contraexemple.

11 . Sigui $f:A\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ contínua en $a=(a_1,\ldots,a_n)\in A$. Definim una nova funció real g d'una variable així: $g(x)=f(x,a_2,\ldots,a_n)$. Proveu que g és contínua en el punt $x=a_1$.

12 . Sigui $f:A\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$. Sigui a un punt adherent de A. Proveu que si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, aleshores $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|b|$. Proveu que el recíproc és cert si $b=0$.

13 . Té l'equació $x-\sin x-1=0$ almenys alguna solució?

14 . Té l'equació $x^{1313} + \dfrac{169}{13 + x^2 + \sin^2 x} = 247$ almenys alguna solució?

15 . * Éssent $a_1,\ a_2,\ a_3 > 0$ i $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, proveu que l'equació $\dfrac{a_1}{x-\lambda_1} + \dfrac{a_2}{x-\lambda_2} + \dfrac{a_3}{x-\lambda_3} = 0$, té una arrel real en cada interval $]\lambda_1, \lambda_2[$, $]\lambda_2, \lambda_3[$.

16 . Sigui $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(x) \in \mathbb{Q},\ \forall\, x \in [a,b]$. Proveu que f és constant.

17 . * Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, tal que $\exists\, x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = x$. Proveu que existeix almenys un punt $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = x_0$.

18 . ** Siguin $I = [0,1]$ i $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f(0) = f(1)$. Demostreu que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\exists\, a \in I$ tal que $f(a) = f\left(a + \dfrac{1}{n}\right)$.

19 . Estudieu la continuïtat de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida per

$$f(x,y) = \left(x \sin \frac{1}{x^2+y^2}, \exp\left(-\frac{x^2+1}{x^2+y^2}\right), \frac{x^4}{x^2+y^2} \right) \text{ si } (x,y) \neq (0,0),$$

$f(0,0) = (0,0,0)$.

20 . Estudieu la continuïtat de la funció f de dues variables definida per

$$f(x,y) = \left(\ln \sqrt{x^2+y^2},\ \frac{3}{1-x^2+y^2} \right) .$$

21 . Sigui $f(x,y) = x \cos \dfrac{1}{y}$ si $y \neq 0$, $f(x,0) = 0$. A quins punts f és contínua?

22 . Siguin $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x = 0 \text{ o } y = 0\}$ i $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x,y) = (x^2+y^2) \sin \dfrac{1}{xy}$. Estudieu l'existència de $\lim\limits_{(a,0)} f$ i $\lim\limits_{(0,a)} f$.

23 . Estudieu la continuïtat de

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^3 y^3}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^4+y^4}$, si $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$.

24 . * Estudieu la continuïtat de

(a) $f(x,y) = x$, si $|x| \leq |y|$; $f(x,y) = y$, si $|x| > |y|$.

(b) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-1} \sin(x^2+y^2)$, si $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$.

(c) $f(x,y) = \dfrac{x\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, si $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$.

25 . Calculeu els següents límits (si existeixen):

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right),\ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) \text{ i } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),$$

de les funcions:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0); f(0,0) = 0$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-y)^2}$, si $(x,y) \neq (0,0); f(0,0) = 0$.

(c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x} \sin xy$, si $x \neq 0$; $f(0,y) = y$.

(d) $f(x,y) = (x+y) \sin \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{y}$, si $x \neq 0$ i $y \neq 0$; $f(0,0) = 0$.

26 . Calculeu el límit a l'origen (si existeix) de:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$.

(c) $f(x,y) = x \sin \dfrac{x}{y}$.

27 . Estudieu la compacticitat del conjunts

$$
\begin{aligned}
A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 - 2x \leq 0,\, e^{xy} - \sin x \leq y^4 + e^x\}, \\
B &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\, e^{xy} + e^{yz} + e^{xz} \geq x + y + z\}.
\end{aligned}
$$

28 . Siguin $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq x,\, y \leq 2x\}$ i $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $f(x,y) = \left(\dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \cos(3x + y)\right)$, si $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = (0,1)$.

(a) Proveu que A és compacte.

(b) Estudieu la continuïtat de f.

(c) Proveu que $f(A)$ és compacte.

7. Derivació

1 . Estudieu la derivabilitat a l'origen de les funcions

a) $f(x) = E(x)\sin x$, b) $f(x) = x^2\chi_{\mathbb{Q}}$,
c) $f(x) = x \mid x \mid$, d) $f(x) = x \arctan \frac{1}{x}$, $x \neq 0$; $f(0) = 0$.

2 . Sigui $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x}}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. És f derivable en $x = 0$? És contínua la seva funció derivada ?

3 . R Sigui $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. És f derivable en $x = 0$? És contínua la seva funció derivada ?

4 . Doneu un exemple d'una funció $f \in C^4(\mathbb{R})$ però $f \notin C^5(\mathbb{R})$. (Podeu buscar-la, per exemple, de la forma $f(x) = x^\alpha \mid x \mid^\beta$).

5 . * Sigui E el conjunt de funcions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tals que $\exists\, k > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq k|\sin x - \sin y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$

(a) Proveu que si $f \in E$, f és periòdica de període 2π, contínua i acotada.

(b) És cert que si $f \in E$ i és derivable, llavors $f' \in E$?

(c) Proveu que $\forall\, f \in E$, la derivada per la dreta de f en $\dfrac{\pi}{2}$ és 0.

(d) Sigui $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(t) = t$, $\forall\, t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. És cert que $h \in E$?

(e) Sigui $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $g(t) = \ln\left(1 + \dfrac{\sin t + \sin|t|}{3}\right)$. És cert que $g \in E$?

6 . Calculeu les derivades parcials de $f(x, y) = x^{y^x}$.

7 . Calculeu les derivades parcials de $f(x, y) = x^2 \tan \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}$, si $(x, y) \neq (0, 0)$ i comproveu que $xD_xf(x, y) + yD_yf(x, y) = 2f(x, y) \qquad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

8 . Calculeu $D_yf(0, \pi)$, essent $f(x, y) = \dfrac{(e^{xy} - 1)\arcsin y^x + y^4 \cos(\pi + xy)}{x^2y^2 + x^2 + y^2}$.

9 . Sigui f la funció real definida en $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ per $f(x, y) = y^x$. Calculeu $D_{xx}f$, $D_{xy}f$, $D_{yx}f$ i $D_{yy}f$, en A.

10 . * Sigui $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $x(D_1F + D_{12}F) = D_2F + D_{22}F$.

Proveu que $(-1)^n(D_2^{n+1}F - xD_1(D_2^nF)) = D_2F - xD_1F$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

11 . Calculeu la derivada n-èssima de $f(x) = x^3 \cos x$.

12 . * Proveu la fórmula $D^n(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}) = (-1)^n x^{-n-1}e^{1/x}$.

13 . ** Demostreu per inducció sobre p: $\dfrac{1}{x^{p+1}}(D^pf)\left(\dfrac{1}{x}\right) = (-1)^pD^p\left(x^{p-1}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

14 . Sigui $f(x, y) = \dfrac{y^2x - 2x^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, i $f(0, 0) = 0$. Calculeu $D_1f(0, 0)$ i $D_2f(0, 0)$.

15 . Estudieu la continuïtat i l'existència de derivades parcials de $f(x,y) = y^2 \sin \dfrac{x}{y}$, si $y \neq 0$, i $f(x,0) = 0$.

16 . * Per a les següents funcions, estudieu la seva continuïtat, i l'existència i continuïtat de les seves derivades parcials, a l'origen:

(a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$; (b) $g(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, $g(0,0) = 0$,

(c) $h(x,y) = y \sin \dfrac{1}{x}$, $h(0,y) = 0$.

17 . Sigui $f(x,y) = \dfrac{x \sin y - y \sin x}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, i $f(0,0) = 0$. Calculeu $D_{xx}f(0,0)$ i $D_{yx}f(0,0)$.

18 . Essent $f(x,y) = xy \ln(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$, i $f(0,0) = 0$, demostreu que f és contínuament derivable a tot $\mathbb{R}^2$.

19 . Estudieu si $f(x,y)$ definida per $f(x,y) = x \left[\exp\left(-\dfrac{1}{(x-y)^2} \right) + 1 \right]$ si $x \neq y$, i $f(x,x) = 1$, és contínuament derivable en el $(0,0)$.

20 . Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x,y) = \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, i $f(0,0) = 0$. Proveu que f és contínua, però no C^1 en $(0,0)$.

21 . Sigui f la funció real definida en $\mathbb{R}^2$ per $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, i $f(0,0) = 0$. Demostreu que f admet derivades parcials en $(0,0)$ i calculeu-les. És f C^1 a l'origen?

22 . * **R** Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mid f(x) \mid \leq \parallel x \parallel^2$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$. Proveu que f és derivable en 0.

23 . *(a) Proveu que $f_2(x,y) = |xy|^{1/2}$ no és C^1 en $(0,0)$.

(b) Sigui α un nombre real tal que $\alpha > 1$. Demostreu que la funció real f_α definida en $\mathbb{R}^2$ per $f_\alpha(x,y) = |xy|^\alpha$ si $x \neq 0$ i $y \neq 0$, i $f_\alpha(x,y) = 0$ si $x = 0$ o $y = 0$, és C^1 en el punt $(0,0)$.

24 . Considereu la funció $f(x,y)$ definida per $f(x,y) = \dfrac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$, i $f(0,0) = 0$, on $\alpha, \beta \geq 0$. Clarament és de classe C^∞ a $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Quant a l'origen:

(a) Proveu que f és contínua si i només si $\alpha + \beta > 2$.

(b) Proveu que f és de classe C^1 si, i només si, $\alpha + \beta > 3$.

25 . Siguin $f(x,y,z) = (\sin(xy+z), (1+x^2)^{yz})$, i $g(u,v) = (u + e^v, v - e^u)$.

(a) Calculeu $Df_{(1,-1,1)}$.

(b) Calculeu $Dg_{(0,\frac{1}{2})}$.

(c) Calculeu $D(g \circ f)$ en $(1,-1,1)$.

26 . Siguin $f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2, x^2 + y^2 - z^2, -x^2 + y^2 + z^2)$ i $g(u,v,w) = (uvw, uv + vw + wu, 2u + 3v + 5w)$ dues aplicacions en $\mathbb{R}^3$. Trobeu $D(f \circ g)(1,1,1)$ i $D(g \circ f)(1,1,1)$.

27 . Siguin $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$, $g(x,y) = \sin xy$ i $h(x,y) = x^2 + y^2$. Calculeu $D_1(f \circ (g,h))(0,2)$ i $D_2(f \circ (g,h))(0,2)$.

28. Siguin $g \in C^2(\mathbb{R})$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, g(x+yz) > 0\}$ i $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x,y,z) = \ln(g(x+yz))$. Calculeu $x^2 D_{xx} f + 2xy D_{xy} f + y^2 D_{yy} f$.

29. Sigui $g = (g_1, g_2)$ la funció de $\mathbb{R}_0^+ \times]0, 2\pi[$ en $\mathbb{R}^2$ definida per $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Siguin $(r_0,\theta_0) \in \mathbb{R}_0^+ \times]0, 2\pi[$ i $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable en el punt $(x_0,y_0) = g(r_0,\theta_0)$. Si $F = f \circ g$, calculeu $DF(r_0,\theta_0)$.

30. *R Sigui $f \in C^2(\mathbb{R})$. Suposem $f''(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Sigui g una funció de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ admetent en cada punt de $\mathbb{R}^2$ derivades parcials de segon ordre. Se suposa que g és *harmònica*, és a dir, $D_{xx} g + D_{yy} g = 0$. Demostreu que la funció $F = f \circ g$ és harmònica si i només si la funció g és una funció constant.

31. Sigui $f \in C^2(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ tal que $f(tx,ty) = tf(x,y)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (funció homogènia de grau 1).

(a) Proveu que $(D_{xy} f)^2 = (D_{xx} f)(D_{yy} f)$.

(b) Proveu que si $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, aleshores és de la forma $f(x,y) = ax + by$.

32. Calculeu la derivada direccional màxima de $f(x,y) = x^y$ en el punt $(e,1)$.

33. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x,y,z) = x^2 + 2xy - z^3$.

(a) Trobeu la derivada direccional de f segons el vector $v = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$, en el punt $a = (7,4,1)$,

(b) Determineu la direcció segons la qual la derivada és màxima, en aquest punt.

34. Sigui $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$. Fent servir la definició de derivada direccional, proveu que $D_x f(0,0) = D_y f(0,0) = 0$, i que no existeix cap altra derivada direccional.

35. Sigui $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, A obert. Suposem que existeix $D_v f(a)$, essent $v \in \mathbb{R}^n$, $\| v \| = 1$, $a \in A$. Proveu que $D_{-v} f(a) = -D_v f(a)$.

36. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 en $\mathbb{R}^2$. Sabent que les derivades de f en el punt $(0,2)$ segons els vectors $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ i $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ són respectivament $-1/\sqrt{2}$ i $3/\sqrt{2}$, calculeu la matriu de la diferencial de f en $(0,2)$ en la base ordinària.

37. Sigui $f \in C^1(\mathbb{R})$. Sigui $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Si $h = f \circ g$, proveu que $\| \operatorname{grad} h(x,y,z) \|^2 = 4g(x,y,z)[f'(g(x,y,z))]^2$

38. Sigui $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, A obert. Sigui $v \in \mathbb{R}^n$ un vector unitari (és a dir, $\| v \| = 1$). Sigui $a \in A$. En un cert entorn de $0 \in \mathbb{R}$ definim la funció real $\Phi(t) = f(a + tv)$. Proveu que si existeix $\Phi'(0)$ aleshores $D_v f(a) = \Phi'(0)$.

39. Sigui $f(x,y) = \sqrt{| x^2 - y^2 |}$.

(a) Proveu que la derivada de f en $(0,0)$ és zero en les següents direccions:

$$1)\quad v = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad 2)\quad v = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$3)\quad v = \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad 4)\quad v = \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

(b) Proveu que no existeix la derivada de f en $(0,0)$, en qualsevol altra direcció.

40 . Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per: $f(x,y) = \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, si $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$.

Trobeu la derivada de f en $(0,0)$ en qualsevol direcció v.

41 . Sigui $f(x,y,z) = \mid x+y+z \mid$. Si $p = (x_0, y_0, z_0)$ és tal que $x_0 + y_0 + z_0 = 0$, trobeu aquelles direccions v en les quals la derivada en p existeix.

42 . Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció real donada per $f(x,y) = x+y$ si $x = 0$ o $y = 0$, i $f(x,y) = 1$ si $x \neq 0$ i $y \neq 0$.

(a) Existeixen $D_x f(0,0)$ i $D_y f(0,0)$?

(b) Si considerem una altra direcció $u = (a_1, a_2)$, on $a_1 \neq 0$ i $a_2 \neq 0$, existeix $D_u f(0,0)$?

43 . El moviment d'un vehicle al pla ve descrit per la corba $x^2y + xy - 2 = 0$, on $(x(t), y(t))$ és la posició a l'instant t. Sabent que en el punt $(1,1)$ la velocitat és $(1,-3)$, i que el mòdul de la velocitat és constant durant tot el trajecte, quina és l'acceleració del vehicle en el punt $(1,1)$?

8. Teoremes d'aproximació

1 . El període T d'un pèndol de longitud ℓ és $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

(a) Calculeu T amb dades aproximades $\ell \simeq 0.6m$ i $g \simeq 10m/s^2$, l'error de les quals respecte les dades reals és de $0.05m$ i $0.2m/s^2$ respectivament.

(b) Si sabem que les dades reals són $\ell = 0.57m$ i $g = 9.81m/s^2$, calculeu l'error comès i compareu-lo amb la cota obtinguda a (a).

2 . Proveu que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = 2^{-x} - x$ té un únic zero real i calculeu la seva part entera.

3 . Sigui $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ contínua i derivable en $]0,1[$, tal que $f'(x) \neq 1$, $\forall\, x \in]0,1[$. Proveu que existeix un únic punt $a \in [0,1]$ tal que $f(a) = a$.

4 . Sigui f una funció n vegades derivable en $\mathbb{R}$. Proveu que si f té $n+1$ zeros, llavors $D^n f$ té almenys un zero.

5 . La funció $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ s'anul·la en $x = 1$ i $x = -1$. No obstant això, $f'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in [-1,1]$. Hi ha alguna contradicció amb el teorema de Rolle?

6 . Siguin $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $0 < a < b$. Proveu que $1 - \dfrac{a}{b} < \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b}{a} - 1$. Utilitzeu aquest resultat per a trobar una aproximació de $\ln 1.2$.

7 . Demostreu que si $0 \leq a < b$, llavors $\dfrac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \dfrac{b-a}{1+a^2}$.

8 . * Proveu que si $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, llavors $2x < \sin x + \tan x$.

9 . ** Deduïu, a partir del teorema del valor intermig aplicat a la funció $\ln x$, que la successió (A_n) definida per $A_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ té límit ∞.

10 . * Suposem que f és una funció real, contínua per a $x \geq 0$, derivable per a $x > 0$, verificant que $f(0) = 0$ i que f' és monòtona creixent. Proveu que $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, definida per $x > 0$, és monòtona creixent.

11 . ** Sigui $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, contínua en $[a,b]$ i derivable en $]a,b[$. Proveu que si $f(a) = f(b) = 0$ i $f(x) > 0$, $\forall\, x \in]a,b[$, llavors $h :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, definida per $h(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ és exhaustiva.

12 . Assenyaleu en quants punts es tallen els gràfics de les funcions $f(x) = 2x - x^2$ i $g(x) = \frac{2}{5}e^x$.

13 . Calculeu el polinomi de Taylor, fins als termes de tercer ordre (inclosos), de la funció $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$ en el punt $x = 1$.

14 . Calculeu, per generació, el desenvolupament de Taylor a l'origen de

$$f(x) = \frac{x+60}{x^3 - 10x^2 + 31x - 30}.$$

15 . Calculeu, per generació, el desenvolupament de Taylor a l'origen de

$$f(x) = \arctan \frac{1-x^2}{1+x^2}\,.$$

16 . Calculeu, per generació, el desenvolupament de Taylor a l'origen de

$$\begin{array}{ll} f(x) = \arcsin x\,, & f(x) = \arctan x\,, \\ f(x) = \operatorname{arcsinh} x\,, & f(x) = \operatorname{arctanh} x\,. \end{array}$$

17 . Calculeu els límits (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\cos\sqrt{\frac{2a}{x}}\right)^x$.

18 . Calculeu els límits

$$\text{(a)}\ \lim_{\pi/2} \frac{\tan 2x}{\tan x}, \qquad \text{(b)}\ \lim_{0} \frac{\cos x^2 - 1}{\ln\cos x^2}, \qquad \text{(c)}\ \lim_{0^+} \sinh x \ln x, \qquad \text{(d)}\ \lim_{0} x e^{x^{-2}}.$$

19 . Comproveu que els límits (a) $\displaystyle\lim_{0} \frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$, (b) $\displaystyle\lim_{\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x}$

són del tipus $0/0$ i ∞/∞. Demostreu que els límits existeixen, però que en canvi no es poden calcular aplicant la regla de l'Hopital.

20 . Calculeu els límits a l'origen de les funcions

$$f(x) = \frac{(x+\sin x)^2 + \sin^3 x}{\sin x^2 + \tan^2 x \arctan x}, \qquad f(x) = \frac{\sin^3 x - \sin x^3}{\ln(1+x^5)}\,.$$

21 . Calculeu el límit $\displaystyle\lim_{+\infty} \frac{x^\beta - (x-1)^\beta}{x^\beta}\, x$, segons els valors de $\beta \in \mathbb{R}$.

22 . Donada $f(x) = e^{x^2}(x\cos x + \sin x)$,

i) Trobeu el desenvolupament de Taylor de f.

ii) Calculeu $D^5 f(0)$ i $D^3 f^{-1}(0)$.

23 . Donada $f(x) = x - 1 + \dfrac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, calculeu $D^3 f^{-1}(0)$.

24 . Utilitzeu el desenvolupament de Taylor d'ordre 3 de la funció sinus per obtenir $x_0 = \sqrt{15} - 3$ com a valor aproximat de l'arrel de l'equació $\sin x = x^2$. Deduïu igualment que $|\sin x_0 - x_0^2| < \dfrac{1}{200}$.

25 . * Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dues vegades derivable, que verifica $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{1/x} = e^3$.

i) Proveu que $f(0) = f'(0) = 0$.

ii) Calculeu $f''(0)$.

26 . Essent $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2, tal que: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) > 1$, $f''(0) > 0$,

(a) Proveu que existeix $\alpha \in]0,1[$ tal que $f'(\alpha) = 1$.

(b) Demostreu que existeix $\beta \in]0,1[$ tal que $f''(\beta) = 0$.

27 . * Determineu a i b de manera que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \dfrac{x+ax^3}{1+bx^2}}{x^p} = 0$, amb $p \in \mathbb{N}$ el més gran possible.

28 . * Determineu $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left[\sqrt{x^2-x+1} - \sqrt[3]{x^3+\lambda x^2+1}\right] = 0$.

29 . * Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mid f \mid \leq C_0$ i $\mid f'' \mid \leq C_2$ en $\mathbb{R}$. Demostreu que $\mid f'(a) \mid \leq 2\sqrt{C_0 \cdot C_2}$.

30 . Utilitzeu la fórmula de Taylor per a desenvolupar, fins al terme de grau 3, les següents funcions:

(a) $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy^2$, en potències de $(x-1)$ i $(y-2)$.

(b) $g(x,y) = \ln(x+y)$, en un entorn de $(1,1)$.

(c) $h(x,y,z) = e^{a(x+y+z)}$, $a \neq 0$, en un entorn de $(0,0,0)$.

31 . Desenvolupeu $f(x,y) = x^y$, en un entorn de $(1,1)$, fins a terme de grau 3. Apliqueu aquest resultat per a calcular aproximadament $(1.1)^{1.02}$.

32 . * Calculeu $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{e^x \sin(x+y) - x - y - x^2 - xy}{(\mid x \mid + \mid y \mid)^2}$.

33 . * Discutiu, segons el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lim_{(1,0)} \frac{\ln(x-1+e^y)-\lambda(x+y-1)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$.

34 . Determineu el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ per tal que: $\lim_{(0,0)} = \frac{\arctan(x^2+y)-x^2-y+\lambda y^3}{\sqrt{x^2+y^2}^3} = 0$.

35 . Calculeu totes les derivades d'ordre 10 a l'origen de la funció $\sin xy$.

36 . Calculeu totes les derivades d'ordre 5 a l'origen de la funció $(1+x)^y$.

37 . Considereu la funció $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $g(x,y) = e^{x+y}$

(a) Calculeu la seva fórmula de Taylor a l'origen, fins a ordre $p \in \mathbb{N}$ qualsevol.

(b) Utilitzeu-la per a estudiar si existeix $\lim_{(0,0)} \dfrac{e^{x+y} - 1 - x - y}{x^2+y^2}$.

(c) Utilitzeu-la igualment per a trobar una cota de $|e^{x+y} - 1 - x - y|$ per a $|x| < 0.1$, $|y| < 0.1$.

38 . Acoteu l'error que cometem en desenvolupar a l'origen la funció $\sin a(x^2+y^2)$ mitjançant el polinomi de Taylor de grau 2, en el conjunt $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x| < 0.1, \quad |y| < 0.1\}$.

39 . Trobeu el desenvolupament de Taylor en el punt $(x_0, y_0) = (0,1)$, fins al terme de grau 1, de la funció $f(x,y) = (1+y^2)^{1/2} \cos x$. Acoteu l'error comès en el conjunt

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad -0.1 < x < 0.1, \quad 0.9 < y < 1.1\}$$

.

40 . Proveu que si $\mid x \mid < 0.1$ i $\mid y \mid < 0.1$, llavors $\mid e^x \sin(x+y) - (1+x)(x+y) \mid < 0.02$.

9. Teorema de la funció inversa

1 . Sigui $f(x,y) = (y, x+y^2)$.

(a) Proveu que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ i que és localment invertible en tots els punts de $\mathbb{R}^2$.

(b) Trobeu l'expressió de f^{-1} (inversa global) i comproveu que $Df^{-1}(f(a,b)) = (Df(a,b))^{-1}$.

2 . Sigui $f(x,y) = (e^{2x} - e^y, e^y)$.

(a) Proveu que f és localment invertible en tots els punts de $\mathbb{R}^2$.

(b) Trobeu l'expressió de f^{-1}, i comproveu que $Df^{-1}(f(a,b)) = (Df(a,b))^{-1}$.

3 . Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $f(u,v) = (e^u + e^v, e^u - e^v)$.

(a) Proveu que f és localment invertible en $\mathbb{R}^2$.

(b) Proveu que f és (globalment) invertible. Obtingueu f^{-1}.

(c) Comproveu que les matrius de derivades de f i de f^{-1} en punts corresponents són inverses l'una de l'altra.

4 . Sigui $g : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, definida per $g(x,y) = (x^2 - y^2, xy)$.

(a) Determineu si g és localment invertible en A.

(b) Trobeu $g(A)$ i si g és bijectiva, trobeu explícitament g^{-1}.

5 . Sigui $g : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida per $g(x,y,z) = (x^8 + 10, y^2 + 3, \frac{4}{z})$.

(a) Determineu A per tal que g sigui localment invertible en A.

(b) Determineu A per tal que g sigui (globalment) invertible.

6 . Sigui $f(x,y) = (\sin x + y^3, \cos x - e^y)$.

(a) Proveu que té inversa local en $(0,0)$.

(b) Trobeu $Df^{-1}(0,0)$.

7 . Sigui $f(x,y) = (x\cos y, x\sin y)$ definida en $A = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$. Proveu que f és localment invertible en tot punt de A, però no és (globalment) invertible.

8 . Sigui $f(x,y) = (e^{x+y} + x^2 - 1, x^2 + y\cos x)$.

(a) Proveu que f té inversa C^1 en un entorn de $(0,0)$.

(b) Proveu que $g = f \circ f + f^{-1}$ és C^1 en $(0,0)$ i calculeu $Dg(0,0)$.

9 . Sigui $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $g(x,y) = (x^2 - x - 2, 3y)$. Proveu que g no és (globalment) invertible.

10 . Sigui $g : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x\}$, definida per $g(x,y) = \left(\ln xy, \dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$.
És g localment invertible en tot punt de A ?

11 . Sigui $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $g(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

(a) Proveu que g és localment invertible en $\mathbb{R}^2$.

(b) Proveu que g no és (globalment) invertible en $\mathbb{R}^2$.

(c) Si $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, t < y < 2\pi + t\}$, proveu que $g_{|A}$ és (globalment) invertible.

12. Sigui $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida per $g(x,y,z,t) = (x+2, y+3, z+4, t+5)$.

(a) Determineu si g és localment invertible en $\mathbb{R}^4$.

(b) Trobeu $g(\mathbb{R}^4)$ i si g és bijectiva, trobeu explícitament g^{-1}.

13. Sigui $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $g(x,y) = (x+2y, x-y)$.

(a) Proveu que g és (globalment) invertible.

(b) Calculeu $g(\mathbb{R}^2)$ i trobeu explicítament g^{-1}.

14. Siguin $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definides per
$f(x,y) = (2x - e^{1-y}, 2x - e^{1-x})$, $g(x,y) = \left(\dfrac{x+y}{x^2+y^2}, e^{x^2} - e^{y^2} + 1\right)$.

(a) Proveu que $g^{-1} \circ f$ està ben definida i és C^1 en un entorn de $(1,1)$. Calculeu $D(g^{-1} \circ f)(1,1)$.

(b) Proveu que $f^{-1} \circ g$ està ben definida i és C^1 en un entorn de $(1,1)$. Calculeu $D(f^{-1} \circ g)(1,1)$.

(c) Quina relació hi ha entre les matrius de derivades calculades als apartats anteriors?

15. Sigui $g(x,y,z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$.

(a) Proveu que g és de classe C^1 en $\mathbb{R}^3$ i té inversa de classe C^1 en un entorn de cada punt.

(b) Proveu que, a més, g és (globalment) invertible.

16. Essent $f(u,v) = 4\sin u + e^v$, $g(x,y) = (xy+x, 2x+y+1)$ amb $y > -1$, calculeu $D[f \circ g^{-1}](0,1)$.

17. *R Essent $f : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right] \longrightarrow [-1, \sqrt{2}]$, $f(x) = \sin x + \cos x$, calculeu:

(a) $D[f^{-1} \circ (1+f)]\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(b) $D\left[f \circ \left(-\dfrac{\pi}{4} + f^{-1}\right)\right](1)$.

10. Teorema de la funció implícita

1. (a) Proveu que l'equació $y^2 - 2xy = a^2$ defineix y com a funció implícita de x en un entorn de $(0, a)$, amb $a \neq 0$.

(b) Trobeu la seva expressió local i les seves derivades primera i segona.

2. (a) Proveu que l'equació $2e^{xy} - \sin \frac{x}{z} - 2z = 0$ defineix una funció z en un entorn obert W del punt $(0,0)$ tal que $z(0,0) = 1$.

(b) Calculeu $D_x z$, $D_{xy}z(0,0)$.

3. * En l'equació $y + \varepsilon \sin 2y = x$ no es pot aïllar y en funció de x exactament. Trobeu una solució aproximada quan ε és petit.

4. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x,y) = y \cos x$.

(a) Proveu que $f(x,y) = 0$ defineix una funció implícita C^1, $y = h(x)$ en un entorn de $(0,0)$.

(b) Trobeu $Dh(0)$.

(c) Determineu si h té funció inversa C^1 en un entorn de 0.

5. (a) Proveu que el sistema $\left\{ \begin{array}{l} xu^3 + yv^2 = 4 \\ y^2u + 2xv = 0 \end{array} \right.$ defineix u, v com a funcions implícites de x, y en un entorn de $(0,1,0,2) = (x_0, y_0, u_0, v_0)$.

(b) Trobeu u_x, u_y, v_x, v_y.

(c) Sigui $F = (u,v)$. Trobeu $DF(0,1)$.

(d) Proveu que F és localment invertible en $(0,1)$.

(e) Si G és la inversa local, calculeu $DG(0,2)$.

6. (a) Demostreu que el sistema $\left\{ \begin{array}{l} xe^y - ue^v = 0 \\ ue^x + ye^v = 1 \end{array} \right.$ defineix en un entorn de $(0,1,0,0)$ dues funcions implícites u, v.

(b) Estudieu si és localment invertible en $(0,1)$ la funció $g = (u,v)$.

(c) Calculeu, en tal cas, la matriu de derivades de la seva inversa local en $g(0,1)$.

7. Sigui $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $f(x,y,z,u,v) = (u + v + x^2 - y^2 + z^2,\ u^2 + v^2 + u - 2xyz)$.

(a) Proveu que en un entorn de $(0,0,0,-1/2,1/2)$, l'equació $f(x,y,z,u,v) = 0$ defineix una funció implícita $(u,v) = (h_1(x,y,z),\ h_2(x,y,z))$.

(b) Calculeu $Dh(0,0,0)$, on $h = (h_1, h_2)$.

8. (a) Proveu que el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} xz^3 + y^2u^3 = 1 \\ 2xy^3 + u^2z = 0 \end{array} \right.$$

defineix x, y com a funcions implícites de z, u en un entorn de $(0,1,0,1) = (x_0, y_0, z_0, u_0)$.

(b) Sigui $g(z,u) = (x(z,u), y(z,u))$ la funció implícita de l'apartat anterior. Proveu que té inversa de classe C^1 en un entorn de $(0,1)$.

9. (a) Proveu que el sistema

$$\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1 \\ ye^{u-v} - \dfrac{u}{1+v} = 2x \end{cases}$$

determina dues funcions de classe C^1 $u(x,y)$, $v(x,y)$, tals que $u(1,2)=0$ i $v(1,2)=0$.

(b) Trobeu $Du(1,2)$ i $Dv(1,2)$.

10. (a) Proveu que el sistema

$$\begin{cases} x + yv + e^{yu} + e^{xv} = 3 \\ y - xv + e^{xu} + e^{yv} = 3 \end{cases}$$

defineix en un entorn del punt $(x_0,y_0,u_0,v_0) = (1,1,0,0)$ a u i v com a funcions implícites.

(b) Sigui $g = (u,v)$. Proveu que g és localment invertible en un entorn de $(1,1)$ i calculeu $D(g^{-1})(0,0)$.

(c) Sigui $h(x,y) = (xe^y, \arctan xy)$. Proveu que $h \circ g^{-1}$ és de classe C^1 en un entorn de $(0,0)$ i calculeu $D(h \circ g^{-1})(0,0)$.

11. (a) Proveu que el sistema

$$\begin{cases} x\cos v + \pi = y + y\sin u \\ u \sin x = v \cos y \end{cases}$$

defineix en un entorn de $(u_0,v_0,x_0,y_0) = (\pi,0,0,\pi)$ una funció implícita h tal que $h(u,v) = (x,y)$.

(b) Sigui $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $g(x,y) = \sin \dfrac{x}{x^2+y^2}$. Calculeu $D(g \circ h)(\pi,0)$.

(c) Proveu que h és localment invertible en un entorn de $(\pi,0)$.

(d) Calculeu $D(g \circ h^{-1})(0,\pi)$.

12. (a) Suposem que les equacions $2z = x^2 - y$ i $y = z^2 + 2x$ defineixen, en un entorn del punt (a,b,c), y i z com funcions implícites de x. Trobeu $y'(x)$ i $z'(x)$.

(b) Suposem que les equacions $2z = x^2 - y$ i $y = z^2 + 2x$ defineixen, en un entorn del punt (a,b,c), x i y com funcions implícites de z. Trobeu $x'(z)$ i $y'(z)$.

13. * Suposem que l'equació $F(x,y,z) = 0$, defineix en un entorn de (a,b,c), tres funcions x, y, z.

(a) Preciseu el significat rigorós d'aquest enunciat i establiu les condicions per tal que això passi.

(b) Demostreu, precisant el significat, la igualtat $\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$.

14. Suposem que les equacions $F(x,y,z) = 0$ i $\Phi(x,y,z) = 0$ defineixen, en un entorn del punt (a,b,c), y i z com a funcions implícites de x. Trobeu $y'(x)$, $z'(x)$ en funció de D_xF, D_yF, D_zF, $D_x\Phi$, $D_y\Phi$, $D_z\Phi$.

15. Suposem que les equacions $F(x,y) - z = 0$ i $f(x) - z = 0$ defineixen, localment en un punt (a,b,c), y i z com a funcions implícites de x. Trobeu $y'(x)$, $z'(x)$.

16. * Considerem l'equació

$$(*) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \psi(ax + by + cz), \quad a,b,c \in \mathbb{R}, \; c \neq 0,$$

essent $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, $\psi(0) = 0$ i $\psi'(0) = 1$.

(a) Proveu que (*) defineix z com a funció implícita de x i y de classe C^1 en un entorn de $(0,0,0)$.

(b) Sigui $z = g(x,y)$ la funció referida a l'apartat anterior. Proveu que en un entorn de $(0,0,0)$ tenim: $(cy - bz)D_1g(x,y) + (az - cx)D_2g(x,y) = bx - ay$.

(c) Si $\psi \in C^2(\mathbb{R})$, calculeu $D_1g(0,0)$, $D_2g(0,0)$, $D_{11}g(0,0)$, $D_{22}g(0,0)$.

17. * Sigui $z = z(x,y)$ la funció definida implícitament per l'equació

$F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$, on $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Comproveu que $xD_1z + yD_2z = z - xy$.

18. * Essent $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, considerem l'equació

$$(*) \qquad F(x+y, xy) = 0.$$

(a) Doneu les mínimes condicions sobre F per tal que l'equació (*) defineixi, localment a l'origen y com a funció implícita de x.

(b) Calculeu $y'(0)$.

19. * Sigui $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ amb $\alpha = f(0)$, $\beta = f'(0)$, $\gamma = f''(0)$.

(a) Determineu per a quins valors de α, β, γ l'equació $z = f(xz + y)$ defineix, localment a l'origen de $\mathbb{R}^3$, una funció implícita $z = g(x,y)$.

(b) Verifiqueu si per a tots aquests valors es compleix $g(0,y) = f(y)$.

(c) Calculeu, en funció de α, β, γ, el valors de les derivades $g_x(0,0)$, $g_y(0,0)$.

(d) Discutiu per a quins valors de α, β, γ es verifica $g_x = gg_y$.

(e) Suposant α, β, γ tals que es verifiquin les relacions anteriors, calculeu les derivades $g_{xx}(0,0)$, $g_{xy}(0,0)$, $g_{yy}(0,0)$.

11. Extrems

1 . Determineu els extrems relatius de

(a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^3 - y^2 - 3x - 2y + 1$.

(b) $f(x,y) = 8xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

2 . Estudieu els extrems relatius de les següents funcions:

(a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

(b) $g(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$, $\quad 0 < x < 2\pi$, $0 < y < 2\pi$.

(c) $h(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2} + xyz - z + y$

(d) $i(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

(e) $j(x,y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y} \quad (x > 0,\ y > 0)$.

(f) $k(x,y) = xy\ln(x^2 + y^2)$.

(g) $\ell(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $\ell(0,0) = 0$.

(h) $m(x,y) = 5 + x[(\ln^2 x) + y]$, $\quad x > 0$, $\quad m(0,y) = 5$.

3 . Siguin a, b dos números reals tals que $a > b > 0$. Proveu que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$ té extrems absoluts. Calculeu-los.

4 . Determineu en quins punts (a,b), la funció implícita definida localment per l'equació $y^2 - 2xy + 2x^2 - 2x = 0$, presenta extrems relatius en a.

5 . Proveu que en un entorn de $(-12, 12\sqrt{3}, 24\sqrt{3})$ l'equació $2z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0$ defineix una funció implícita $z = f(x,y)$ de classe C^∞ en un entorn de $(-12, 12\sqrt{3})$.

Proveu que f té un mínim relatiu en aquest punt.

6 . * Siguin $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ i $f \in C^2(\mathbb{R})$. Definim $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ per $G(x,y) = F(e^x + e^y, f(x+y))$. Suposant $D_i F(2,0) = D_{ij} F(2,0) = \lambda \neq 0$ per a $1 \leq i,j \leq 2$, $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$ i $1 + 2f''(0) > 0$. Determineu per a quins valors de $f''(0)$ té G un extrem relatiu en $(0,0)$.

7 . * Trobeu, en $\mathbb{R}^3$, la distància entre les rectes

$$x - 1 = y - 1 = z - 2\,, \qquad \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{2} = z\,.$$

8 . Busqueu els extrems absoluts de $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ en el compacte $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq 0,\ y \leq 0,\ x + y \geq -3\}$.

9 . * Sigui $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2 \leq x \leq 6,\ 5 \leq y \leq 9\}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x,y) = 24x + 56y - 3x^2 - 4y^2 - 234$.

(a) Trobeu els extrems absoluts de f en U.

(b) Sigui $V = \{(x,y) \in U,\ 2x + y - 11 = 0\}$. Trobeu els extrems absoluts de f sobre V.

10 . Essent $f \in C^2(\mathbb{R})$ convexa, considerem un cos bidimensional $f(x) \leq y \leq H$ recolzat sobre la recta horitzontal a l'origen, de manera que $f(0) = f'(0) = 0$. Si les coordenades del centre de gravetat són (x_G, y_G), demostreu que:

(a) Per tal que el cos sigui en equilibri cal que $x_G = 0$.

(b) Aleshores, l'equilibri és estable si, i només si, $y_G < 1/\rho$, essent ρ el radi de curvatura de $f(x)$ en el punt de suport (és a dir, l'origen).

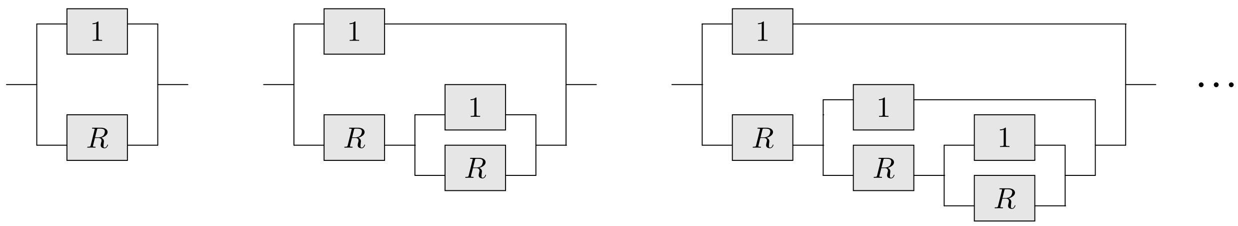
11 . ** Un home, que corre 3 vegades més de pressa que no pas neda, s'apressa a ajudar un nedador en una gran piscina circular de radi R. En termes d'un sistema de coordenades amb origen al centre de la piscina, la posició del nedador és $(-\alpha R, 0)$ amb $0 < \alpha < 1$, mentre que la del rescatador és $(R, 0)$. Quin camí ha de seguir el rescatador per arribar al nedador el més aviat possible?

12 . Se suposa que els canvis de rasant de les autopistes es fan amb un perfil parabòlic $y = -ax^2$, $a > 0$. Quin és el valor màxim de a que permet que un observador d'un metre d'alçada situat en qualsevol lloc pugui veure un objecte de $0,1$ metres d'alçada situat a 100 m de distància?

12. Aplicacions

12.1 Circuits iterats

Essent R una resistència elèctrica, diguem respectivament $R_1, R_2, R_3, \ldots$ les resistències equivalents dels circuits



i així successivament formant doncs una successió de nombres reals positius.

1 . Obtingueu una expressió recurrent d'aquesta successió de resistències equivalents.

2 . Demostreu que és creixent i acotada superiorment. Doncs, convergent.

3 . Demostreu que el límit L_R està entre 0 i 1, qualsevol que sigui R.

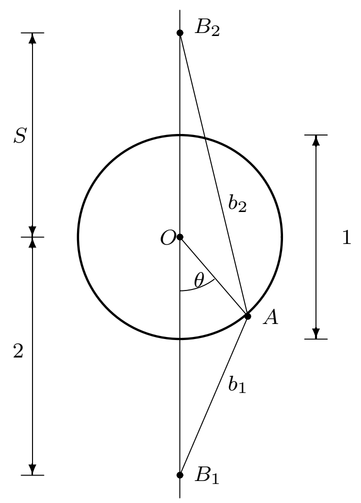
4 . Calculeu aquest límit L_R.

5 . Estudieu com varia L_R quan $R \to +\infty$. Interpreteu-ho.

12.2 Punt de disrupció de la màquina de Zeeman

Sobre un punt A de la vora d'una roda d'1 cm de diàmetre i centre O fix, actuen dues bandes elàstiques AB_1 i AB_2, de llargària en repòs d'1 cm. L'una té l'altre extrem B_1 fix, a 2 cm de O. L'extrem lliure B_2 de la segona es desplaça des d'O en direcció oposada a B_1. Si diem s a OB_2 i θ a l'angle B_1OA, es pregunta els valors de s per als quals $\theta = 0$ és un punt d'equilibri estable del sistema, i els valors per als quals és un punt d'equilibri inestable. Deduïu el valor de s per al qual es produeix la disrupció

(Nota: segons la llei de Hook, l'energia potencial del sistema, en unitats adequades, és $W_s(\theta) = (b_1 - 1)^2 + (b_2 - 1)^2$, on $b_1 = AB_1$ i $b_2 = AB_2$).



Màquina de Zeeman

12.3 Resolució d'equacions en derivades parcials per canvi de variables

1 . Considereu l'equació en derivades parcials

$$x\, D_x\, z = 2y\, D_y\, z\,.$$

Fent el canvi de variables

$$u = x^2 y\,, \qquad v = e^{xy}$$

demostreu que les solucions són de la forma

$$z(x,y) = \varphi(x^2 y)\,.$$

2 . Considereu l'equació en derivades parcials

$$e^{2x} z_y + e^{2y} z_{xx} = e^{2y} z_x + e^{2x} z_{yy}\,.$$

Fent el canvi de variables

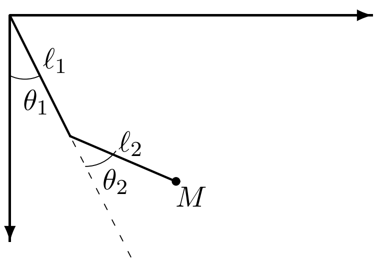
$$x = \ln\left(\frac{u+v}{2}\right)\,, \qquad y = \ln\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

demostreu que les solucions són de la forma

$$z(x,y) = \varphi(e^x + e^y) + \psi(e^x - e^y)\,.$$

12.4 Anàlisi cinemàtica d'un braç articulat

Un braç articulat és mogut per sengles motors de torsió a les dues articulacions, de forma que la seva posició queda determinada pels angles θ_1, θ_2 (vegeu la figura). Se suposa que $\ell_1 > \ell_2$, $0 < \theta_1 < 2\pi$, $0 < \theta_2 < \pi$.



1 . Anàlisi de posicions

(a) Cinètica directa

(i) Determineu la funció

$$\begin{array}{rcl} \varphi :]0,2\pi[\,\times\,]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (\theta_1,\theta_2) & \longmapsto & (x_1,x_2) \end{array}$$

que al valor dels angles a les articulacions fa correspondre les coordenades cartesianes de la "mà" M (vegeu figura).

(ii) Determineu la zona A del pla abastada pel braç, és a dir, $A = \varphi(W)$, on

$$W = \{(\theta_1,\theta_2) : 0 < \theta_1 < 2\pi\,,\ 0 < \theta_2 < \pi\}\,.$$

(b) Cinètica inversa.

(i) Demostreu que per a cada posició de la "mà" $M = (x_1, x_2) \in A$, hi ha només un possible valor de $(\theta_1, \theta_2) \in W$ tal que $(x_1, x_2) = \varphi(\theta_1, \theta_2)$.

2 . Anàlisi de velocitats

(a) Diferenciabilitat

(i) Demostreu que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(W)$.

(ii) Demostreu que $\varphi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(A)$.

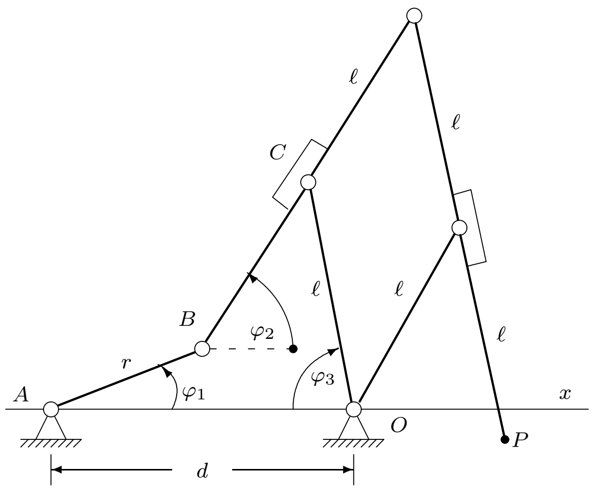
(b) Anàlisi de velocitats

(i) Demostreu que la velocitat de M, $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$, es pot governar per les dels motors $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$.

(ii) En particular, per a $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, calculeu les velocitats $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ necessàries per obtenir les $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ desitjades.

12.5 Anàlisi cinemàtica d'un mecanisme amb enllaços (S. Cardona, D. Clos: Teoria de màquimes, Ed. UPC)

Considerem el mecanisme amb enllaços de la figura.



$r = 20mm$
$\ell = 30mm$
$d = 40mm$

Podem suposar $r < \ell < d < r + \ell$.

1 . Obtingueu les dues equacions d'enllaç geomètriques entre els angles φ_1, φ_2 i φ_3.

2 . Estudieu si φ_1 governa el mecanisme de forma C^1 (és a dir, si φ_2, φ_3 queden determinats per φ_1 i en depenen de forma C^1).

3 . Expresseu les velocitats $\dot{\varphi}_2$, $\dot{\varphi}_3$ en funció de la $\dot{\varphi}_1$.

4 . Expresseu les acceleracions $\ddot{\varphi}_2$, $\ddot{\varphi}_3$ en funció de la $\ddot{\varphi}_1$, i de les velocitats $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$, $\dot{\varphi}_3$.

12.6 Càlcul de l'acceleració d'un flux

Considerem un flux en el pla per al qual la posició (x, y) i la velocitat (u, v) estan lligades per les restriccions:

$$\begin{aligned} x &= \ln u + v^2 \\ y &= u^2 + v^2 \end{aligned}$$

1 . Demostreu que per a posicions i velocitats pròximes a $(1, 2)$ i $(1, 1)$ respectivament, la velocitat ve determinada per la posició, i en depèn de forma C^1.

2 . En aquestes condicions, calculeu l'acceleració en el punt $(1, 2)$.

12.7 Velocitat i acceleració de l'ombra d'un mòbil sobre una pantalla

1 . Un punt òrbita amb celeritat (*mòdul de la velocitat*) v, segons l'el.lipse

$$x^2 + 2y^2 = 3\,.$$

Una font de llum puntual situada a l'origen fa que es projecti la seva ombra sobre la pantalla

$$x^6 + y^4 = 2^6 + 2^4\,.$$

Si la celeritat d'aquesta obre sobre la pantalla és u quan el punt mòbil passa per la bisectriu del primer quadrant, calculeu v en aquest instant.

2 . Resoleu el mateix problema en el cas general d'una òrbita

$$f(x, y) = 0\,,$$

i una pantalla

$$g(x, y) = 0\,,$$

que suposem en cap punt tangent al raig de llum.

3 . En la situació de l'apartat (1), expresseu el valor de l'acceleració tangencial $\dot{v}$ en funció de la celeritat u, i l'acceleració tangencial $\dot{u}$ de l'ombra.

12.8 Potencial controlat implícitament

(A) Suposem que la funció potencial z d'un sistema està lligat a les variables d'estat x, y per l'equació

$$y + \lambda x^2 e^{-\lambda x} - \lambda^2 y^2 z^2 = 2 - 4\lambda^2$$

on λ és un paràmetre de configuració a determinar. Suposem igualment que el punt òptim de funcionament és $x = 0$, $y = 2$, $z = -1$.

- (a) Determineu els valors de λ per als quals el punt òptim de funcionament és factible.
- (b) Entre els valors de λ obtinguts a (1), determineu els que fan que, per a valors pròxims al punt òptim de funcionament, les variables x, y determinen unívocament el potencial z.
- (c) Entre els valors de λ obtinguts a (2), determineu el que fan que el punt òptim de funcionament sigui estable.

(B) Idem, l'equació

$$2x^2 + y^2 + xyz + e^{xz} - 4\lambda x = 1 - 2\lambda^2$$

amb punt òptim $(\lambda, 0, 0)$.

12.9 Despatx elèctric

Considerem un sistema elèctric alimentat per n centrals. El problema del "despatx elèctric" consisteix en assignar les produccions $P_1, \ldots, P_n$ de cadascuna per tal de proveir la potència total P requerida amb el mínim cost de producció.
Suposem que el cost de funcionament de cada central és

$$C_j = \alpha_j + \beta_j P_j + \frac{P_j}{2\gamma_j}, \quad 1 \leq j \leq n$$

on α_j, β_j, γ_j són paràmetres positius.

(A) Demostreu que el problema té solució, única, per a cada P. La designarem per $P_1^*, \ldots, P_n^*$ i per C^* el cost (òptim) corresponent.

(B) Considerem primer el cas de $n = 3$, amb

$$\begin{aligned} C_1 &= 7 + P_1 + P_1^2 \\ C_2 &= 4 + 2P_2 + 2P_2^2 \\ C_3 &= 2 + 4P_3 + 3P_3^2 \end{aligned}$$

(a) Calculeu P_1^*, P_2^*, P_3^* per a $P \geq 2$.

(b) Determineu en quina proporció convé disminuir cada P_j^* per a una disminució unitària de P, si $P \geq 3$.

(c) Calculeu P_1^*, P_2^* i P_3^* per a $P = 1$.

(d) En relació, per exemple, a la segona central: determineu quina variació relativa dels paràmetres $\alpha_2 = 4$, $\beta_2 = 2$, $\gamma_2 = 2$, produiria una major disminució de C^*; calculeu, aleshores, com variaria P_2^*.

(C) En el cas general de n qualsevol:

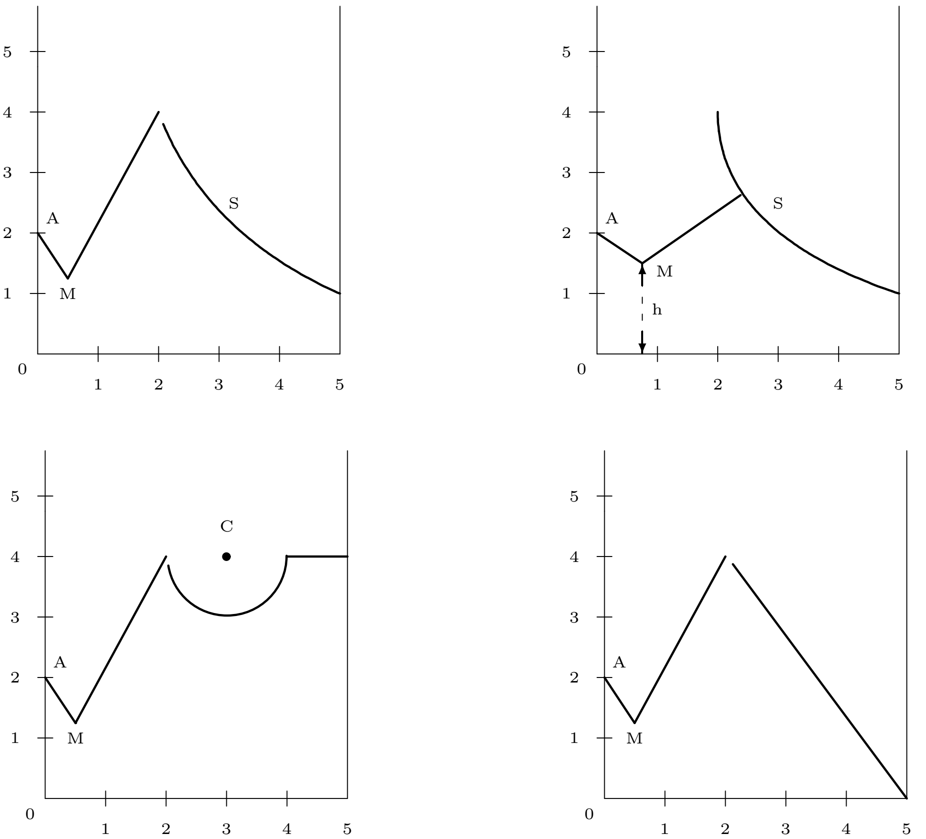
(a) Calculeu $P_1^*, \ldots, P_n^*$ per a P prou gran.

(b) Determineu en quina proporció convé disminuir cada P_j^* per a una disminució unitària de P.

(c) Determineu quines centrals convé mantenir inactives per a P baixa.

12.11 Alçada d'un penjoll si la corda té un extrem fix i l'altre lliscant en un ganxo

En la primera de les figures hem representat un sistema físic format per una corda de longitud $L = 4$, amb un extrem fixat en el punt $A = (0, 2)$, mentre que a l'altre extrem té enganxada una anella que pot lliscar lliurement per la barra S que ens defineix l'altre suport, i que hom pot descriure com la gràfica d'una certa funció $f(t)$ coneguda. D'aquesta corda hi penja un pes M, enganxat a una anella que el permet lliscar lliurement per la corda.
Si fem lliscar l'anella per la barra S, finalment aquesta assolirà la posició d'equilibri que hem representat en la segona figura.



La qüestió que ens plantejem és: a quina alçada h quedarà el penjoll un cop el sistema físic estigui en equilibre. Per simplificar el plantejament, us proposem resoldre el problema en tres etapes:

1 . Doneu el valor de h si $f(t)$ és la semicircumferència de centre $C = (3, 4)$ i radi 1, tal com l'hem representat a la tercera figura.

2 . Doneu el valor de h si $f(t)$ és la recta que passa pels punts $(2, 4)$ i $(5, 0)$, tal com l'hem representat a la tercera figura.

3 . Donada una funció $f(t)$ qualsevol, trobeu:

(a) L'equació que verifica el valor de t corresponent al punt del suport S en el qual es recolzarà la corda quan el sistema estigui en equilibri.

(b) Suposant que hom conegués aquest valor de t, doneu la fórmula que ens permet calcular h en el cas general.

12.12 Estabilitat d'una ampolla mig plena (Problema del Concurs Matemàtic Fòrum 2002 ETSEIB)

Un objecte situat sobre una superfície horitzontal (per exemple, un ou sobre una taula) està en equilibri quan la línia que uneix el seu centre de gravetat amb el punt de contacte és vertical.

Un objecte torna a la seva posició d'equilibri després d'empènyer-lo lleument (és a dir, l'equilibri és asimptòticament estable) quan el punt de contacte és el punt de la superfície de l'objecte localment més proper al seu centre de gravetat. En canvi, l'equilibri és inestable i petites empentes poden trencar-lo quan sobre la superfície de l'objecte i en les proximitats del punt de contacte existeixen punts que estan més a prop del centre de gravetat que el propi punt de contacte.

Tenim un objecte homogeni de forma el·lipsoidal, els eixos del qual són de diferents longituds.

1 . Suposant que l'objecte sigui massís, descriviu tots els seus equilibris i l'estabilitat de cadascun.

2 . Ídem, suposant que sigui buit (és a dir, tota la seva massa està concentrada en la superfície).

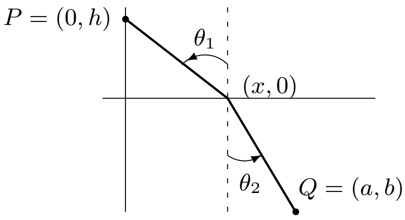
3 . Suposem que situem l'el·lipsoide buit en un equilibri inestable. Establiu una condició que determini quan és possible estabilitzar-lo si l'omplim amb una quantitat adequada d'aigua. Expresseu aquesta condició en funció de la seva massa i les longituds dels seus semi-eixos.

4 . Suposem que és possible estabilitzar un equilibri inestable. Doneu una fórmula explícita per obtenir un valor (entre tots els possibles) de l'altura de l'aigua que estabilitza l'equilibri.

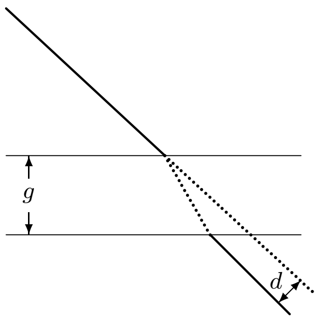
5 . Tenim un el·lipsoide buit amb un quilogram de massa, els semieixos del qual mesuren dos, tres i quatre metres. Quins són els equilibris inestables que es poden estabilitzar?

12.13 Problema de la llei de Snell

La llei de Snell diu que quan un raig de llum passa d'un medi a un altre diferent es refracta, i els angles d'incidència θ_1 i de refracció θ_2 compleixen $\dfrac{\sin\theta_1}{c_1} = \dfrac{\sin\theta_2}{c_2}$, on c_1, c_2 són les velocitats de la llum en el primer i en el segon medi respectivament.



(i) Calculeu la funció $t(x)$ que assigna a cada punt $(x, 0)$el temps que tarda el raig de llum en viatjar de $P = (0, h)$ a $(x, 0)$ i d'aquí a $Q = (a, b)$, i comproveu que el punt en què es compleix la llei de Snell dóna el temps mínim per tal que la llum viatgi de P a Q.



Si fem passar el raig de llum per una lent plana com la de la figura, el resultat és que el raig de llum sortint és paral·lel a l'entrant, desplaçat una distància $d(\theta_1) = g\dfrac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos\theta_2}$, on g és el gruix de la lent.

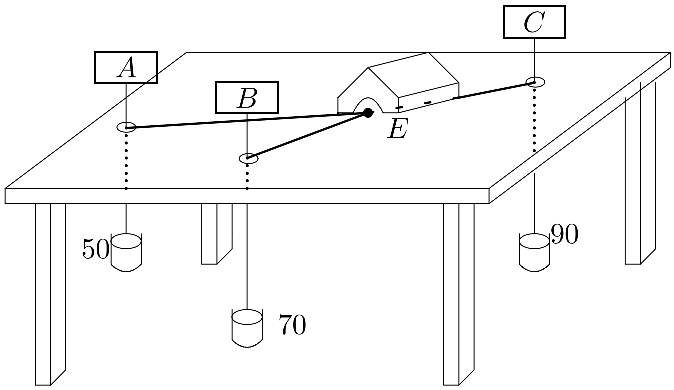
(ii) Si la velocitat de la llum en l'aire és c, i en la lent és $0.8c$, preneu com a variable independent $s_1 = \sin\theta_1$ i calculeu el polinomi de Taylor de grau 4 per a la funció d en la nova variable s_1.

12.14 Problema de l'escola

- Es vol construir una escola E comú a tres pobles A, B, C (que formen un triangle) situats en un gran pla. En A viuen 50 nens/es, en B en viuen 70 i en C, 90. On haurem d'escollir el lloc perquè el temps total de desplaçament de nens i nenes sigui mínim? (Suposem que totes les criatures caminen a la mateixa velocitat uniforme v, la qual pot considerar-se en unitats adequades igual a 1.)

  (a) Plantegeu el problema matemàticament, indicant quina és la funció a minimitzar, i quines equacions han de satisfer les coordenades (x, y) del punt d'ubicació de l'escola. (Suggerim establir un sistema de coordenades de manera que A estigui en el punt $(0,0)$, B en $(b,0)$, C en (c,d) i E en (x,y).)

  (b) Demostreu que el problema es pot resoldre mecànicament de la manera següent: només cal posar sobre una taula el mapa del terreny (veure figura), fer uns forats en els punts on es troben els pobles, fer passar una corda per cada forat, lligar els extrems superiors de les tres cordes amb un nus, i penjar dels extrems inferiors càrregues de pesos 50, 70 i 90 unitats, respectivament. Llavors l'escola s'ha de construir justament en el punt on quedi el nus que uneix les tres cordes. Perquè? (Recordeu que en un sistema en equilibri d'aquestes característiques l'energia potencial ha de ser mínima. Preneu el pla del sol com a referència. Suggerim utilitzar les notacions següents: H per a l'altura de la taula; ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 per a les longituds de cadascuna de les cordes, des del nus comú fins a cadascun del pesos. Suposem que els tres pesos pengen sense arribar a toca el terra, i que el pes de la corda és despreciable.)



Miscel·lània

1 . Es considera la funció f definida per $f(x) = \lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{(1+\sin \pi x)^p - 1}{(1+\sin \pi x)^p + 1}$.

(a) Estudieu el domini de definició.
(b) Determineu en quins punts és contínua.
(c) Dibuixeu la seva gràfica.

2 . Calculeu $f'(0)$, essent f definida per $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\sin x) - x}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$

3 . Considereu l'equació $y^3 - axy - 8 = 0$.

(a) Demostreu que per tot valor del paràmetre a, l'equació anterior defineix y com funció implícita de x en un entorn del punt $(0,2)$.
(b) Determineu el valor del paràmetre a per tal que el tercer terme del desenvolupament en sèrie de Taylor de la funció implícita anterior sigui $-\dfrac{x^3}{12}$ (en un entorn de l'origen).

4 . Sigui (s) el següent sistema d'equacions

$$\begin{cases} x - u - v = 0, \\ y - u^2 - v^2 = 0, \\ z - u^3 - v^3 = 0. \end{cases}$$

Determineu un punt $P = (x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$ tal que:

(a) En un entorn de P el sistema (s) defineixi implícitament tres funcions C^1

$$z = f_1(x,y)\,, \quad u = f_2(x,y)\,, \quad v = f_3(x,y).$$

(b) La derivada de f_1 en el punt (x_0, y_0) sigui màxima segons la direcció del vector $(1,0)$ i el valor de l'esmentada derivada direccional sigui 3.

5 . * Sigui $h(x,y) = x^2 + y^3 + xy + x^3 + ay$, $a \in \mathbb{R}$.

(a) Per a quins valors de a l'equació $h(x,y) = 0$ defineix y com funció implícita de x en un entorn de $(0,0)$? Hi ha algun valor de a per al qual $h(x,y) = 0$ defineix x com a funció implícita de y en un entorn de $(0,0)$?
(b) Sigui $y = f(x)$ la funció implícita de l'apartat anterior. Sigui U l'entorn on està definida i sigui $F : U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $F(x,y) = (e^{x+y} + x^2 - e, f(x) + y \sin x)$. Proveu que F és localment invertible en un entorn de $(0,0)$. Proveu que $G = F \circ F + F^{-1}$ és C^1 en $(0,0)$ i calculeu $DG_{(0,0)}$.
(c) Sigui $y = f(x)$ la funció implícita anterior. Calculeu el valor de a perquè el polinomi de Taylor de 2n grau de f a l'origen valgui 1 quan $x = 1$. Per a quins valors de a, té f un extrem relatiu en $x = 0$?

6 . * Essent $y(x)$ una funció que verifica $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, estudieu si presenta extrem relatiu a l'origen la funció $f(x) = y(1 + x + y(x))$.

7 . * Considereu la funció implícita $z = g(x,y)$ definida localment en $(0,0,1)$ per l'equació $x^4 + y^4 + \alpha z^4 + xyz = \alpha$, $(\alpha \neq 0)$.

(a) Determineu α per tal que es verifiqui:

$$\begin{aligned} &g_x(0,0) = g_y(0,0) = 0, \\ &g_{xx}(0,0) = g_{yy}(0,0) = 0, \\ &g_{xy}(0,0) = 1. \end{aligned}$$

(b) En aquestes condicions, estudieu si la funció $F(x,y) = x^2 + y^2 + (g(x,y))^3$ presenta un extrem relatiu en $(0,0)$.