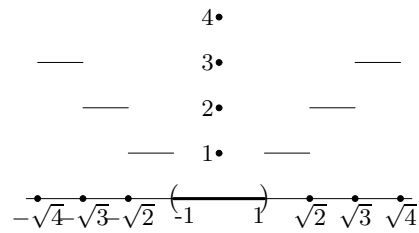


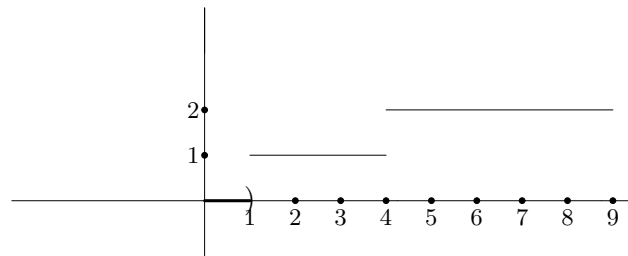
2. Funcions d'una variable

1. a) $]e, +\infty[$. b) $[1, +\infty[$. c) $] - \infty, 1] \cup [2, +\infty[$. d) $[-2, +\infty[$.

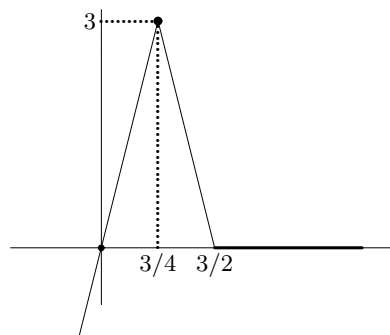
2. a) $E(x^2) = n$, si $\begin{cases} \sqrt{n} \leq x < \sqrt{n+1} \\ \text{o} \\ -\sqrt{n+1} < x \leq -\sqrt{n} \end{cases}$



- b) $E(\sqrt{x}) = n$, si $n^2 \leq x < (n+1)^2$; el domini és $[0, \infty[$.



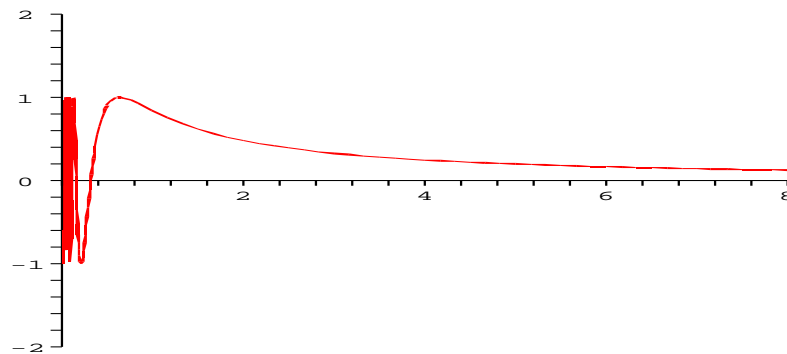
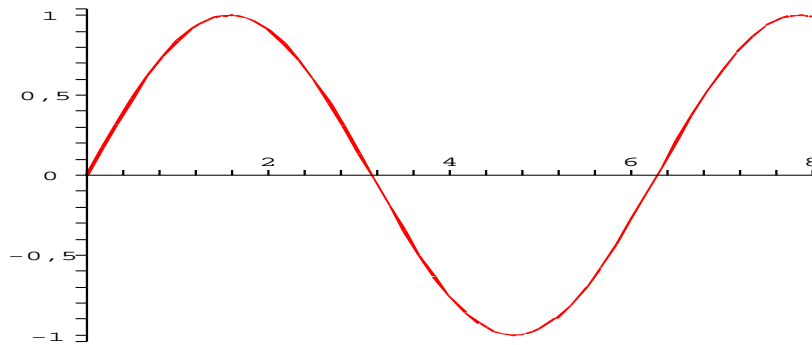
c)



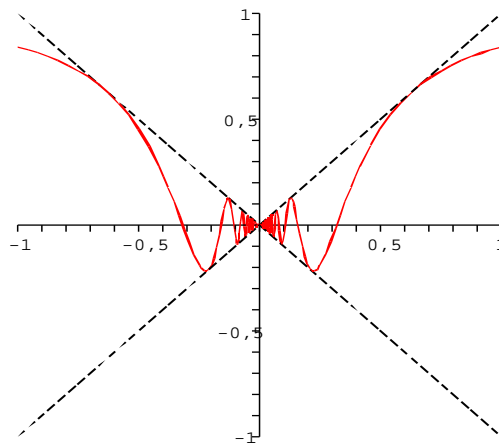
3. -

4.

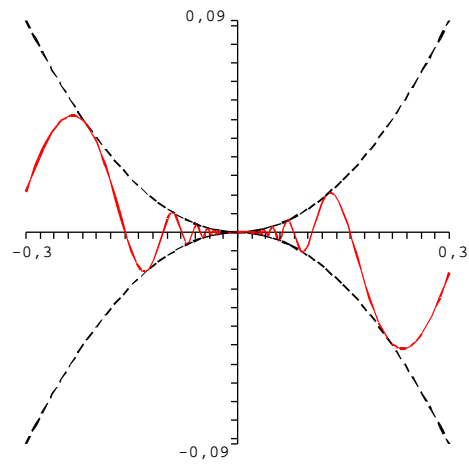
Per fer aquest problema, és convenient tenir present les gràfiques de $\sin x$ i $\sin 1/x$



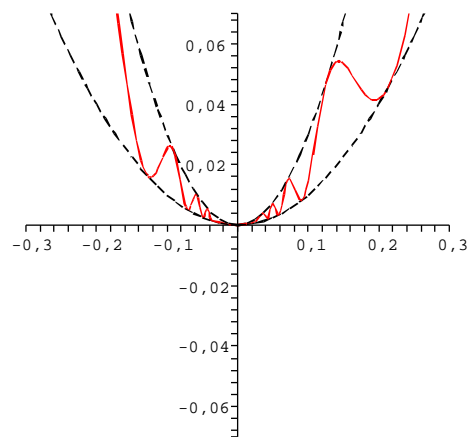
(a) A partir de l'anterior, però amb extrems relatius sobre $\pm x$,



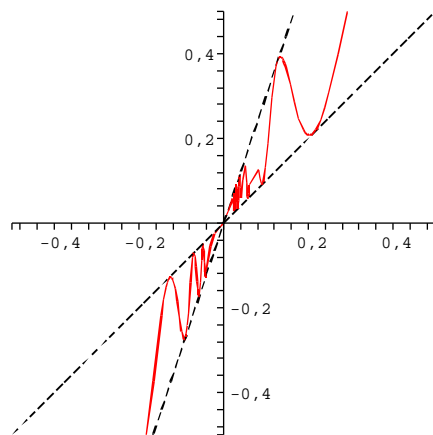
(b) Idem, amb extrems relatius sobre $\pm x^2$:



(c) Idem de l'anterior, amb extrems relatius sobre $3x^2$ i x^2 :



(d) Idem, amb extrems relatius sobre $\pm 3x$ i $\pm x$:



5. a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ no existeix.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ no existeix.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$.

e) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)E(x) = 0$.

6. a) $f'(x) = \frac{e^{3x}}{(1 + e^{6x})\sqrt[3]{(\arctan e^{3x})^2}} \cotan \sqrt[3]{\arctan e^x}$.

b) Notem que $f(x) = e^{(1 - \sin^4 3x) \ln 10}$. Llavors, $f'(x) = -10^{1 - \sin^4 3x} 12(\ln 10) \cos 3x \cdot \sin^3 3x$.

7. a) $f'(x) = e^{\sqrt{\ln(ax^2 + bx + c)}} \frac{1}{2\sqrt{\ln(ax^2 + bx + c)}} \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}$

b) $f(x) = (x^x)^x = e^{x \ln x^x} = e^{x^2 \ln x}$; $f'(x) = e^{x^2 \ln x} (2x \ln x + x) = (x^x)^x (2x \ln x + x)$.

8. $\arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$.

9. Definim $f(x) = 2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$.

(a) $x \geq 1$; $f'(x) = 0$. Per tant, f és constant en $[1, \infty[$. Prenem un valor qualsevol a $[1, \infty[$, per exemple, $f(1) = 2 \arctan 1 + \arcsin 1 = 2 \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Així, $f(x) = \pi$, $\forall x \in [1, \infty[$.

(b) A $[0, 1[$ no és constant, $f(0) = 2 \arctan 0 + \arcsin 0 = 0$, $f(1) = \pi$. Si es calcula $f'(x)$ es comprova que $f'(x) \neq 0$, $x \in [0, 1[$.

10. $x = \pi/6$ és un màxim relatiu. $x = -\pi/6$ és un mínim relatiu.
 $x = -\pi/2$ és un màxim absolut. $x = \pi/2$ és un mínim absolut.

11. L'únic extrem relatiu és $\frac{a}{a+b} \in]0, 1[$, que és mínim. Per altra banda, f és decreixent a $]0, \frac{a}{a+b}[$, i creixent a $]\frac{a}{a+b}, 1[$. Per tant, $x = \frac{a}{a+b}$ és mínim absolut.

12. $f(x) = a \ln x + bx^2 + x$ té extrems en $x = 1$ i $x = 2$, si:

$$\left. \begin{array}{l} f'(1) = a + 2b + 1 = 0 \\ f'(2) = \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -2/3, b = -1/6$$

i, per a aquests valors, $x = 1$ és mínim relatiu i $x = 2$ és màxim relatiu.

13. $\ell = 18 + v + \frac{v^2}{32}$; número de cotxes en una hora: $n = \frac{v}{18 + v + (v^2/32)}$; el màxim d'aquesta funció és $v = 24$.

14. $K = (\sqrt{5} - 2)e^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}}$, que és el valor màxim de la funció $f(x) = e^{-x}(x - x^2)$.

15. a) $\lim_{0^+} \sin x \ln x = 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} xe^{x^{-2}}$ no existeix ja que $\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{x^{-2}} = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{x^{-2}} = -\infty$.

16. a) $f(x) = \sqrt[4]{x^4 - x^3}$. L'asíptota a $-\infty$ és $y = -x + \frac{1}{4}$ i a $+\infty$ és $y = x - \frac{1}{4}$.

b) $f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}$. Té una asíptota vertical a $x = -1$. L'asíptota a $\pm\infty$ és $y = x - 2$.

c) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$. L'asíptota a $+\infty$ és $y = 2x$ i a $-\infty$ és $y = 0$ (horitzontal).

d) $f(x) = \sqrt{x(x+4)}$. L'asíptota a $+\infty$ és $y = x + 2$ i a $-\infty$ és $y = -x - 2$.

En els següents exercicis, estudeu i representeu el gràfic de les funcions

17. · Domini: $] -\infty, -2] \cup]0, +\infty[$.

· $f(-2) = 0$

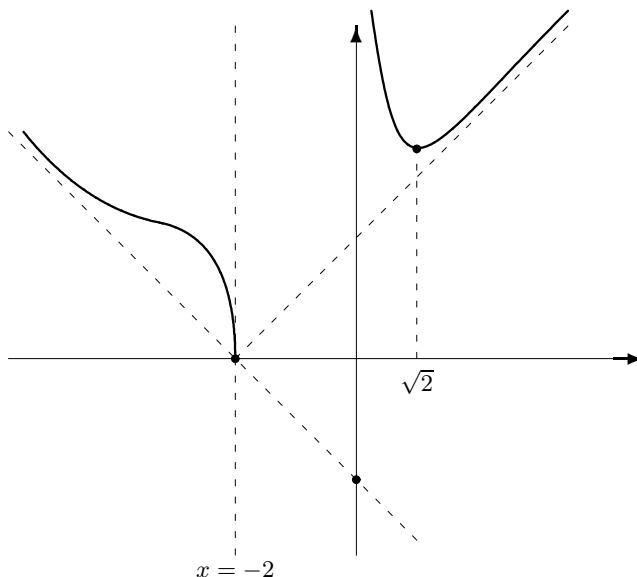
· $f'(x) = \frac{e^{1/x}}{\sqrt{x(x+2)}} \left(x - \frac{1}{x}\right)$ si $x \neq -2$.

· $\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = -\infty$.

· Candidats a extrems: $x = -2$ i $x = \sqrt{2}$.

· Creixement: $] -\infty, -2]$ decreixent; $]0, \sqrt{2}[$ decreixent; $]\sqrt{2}, +\infty[$ creixent.

· Asíptotes: $x = 0$ asíptota vertical; $y = -x - 2$ asíptota a $-\infty$ i $y = x + 2$ asíptota a $+\infty$.



Conclusió: Sense càlculs, es veu que hi ha un punt d'inflexió a l'esquerra de $x = -2$.

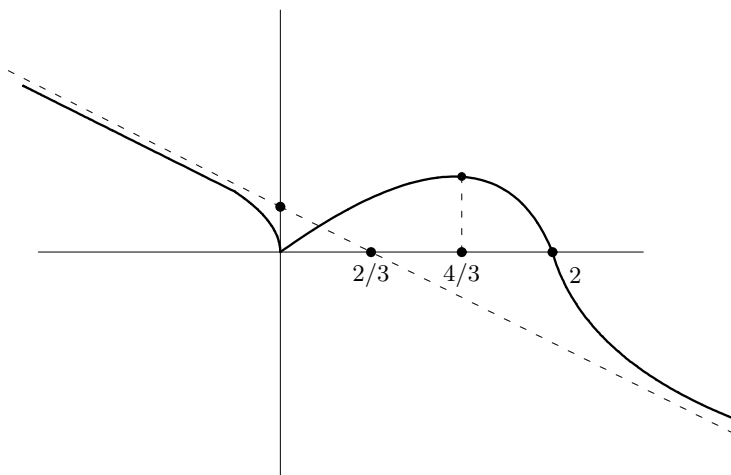
18. · Domini: \mathbb{R} .

· $f(2) = 0, f(0) = 0$.

· $f'(x) = \frac{4x - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^2}}$ si $x \neq 0, 2$.

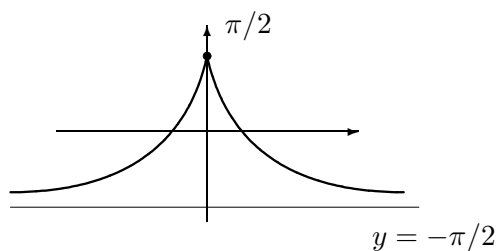
· $\lim_{x \rightarrow 2} f'(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$.

- Candidats a extrems: $x = 0$ i $x = 4/3$.
- Creixement: $] -\infty, 0]$ decreixent; $[0, 4/3]$ creixent; $[4/3, +\infty[$ decreixent.
- Asímptotes: $y = -x + (2/3)$ asímptota a $+\infty$ i $-\infty$.



19. · Domini: \mathbb{R} .

- f és parell: $f(-x) = f(x)$.
- $f'(x) = \frac{-2x}{|x|} \frac{1}{1+x^2}$ si $x \neq 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 2$ i $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -2$.
- Candidats a extrems: $x = 0$.
- Creixement: $] -\infty, 0]$ creixent; $[0, +\infty[$ decreixent.
- Asímptotes: $y = -\pi/2$ asímptota (horitzontal) a $+\infty$ i $-\infty$.



20. · Domini: $]0, +\infty[$.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1/2$, és contínua en $x = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, té una discontinuïtat evitable en $x = 0$, per tant, per dibuixar-la podem considerar $f(0) = 0$.

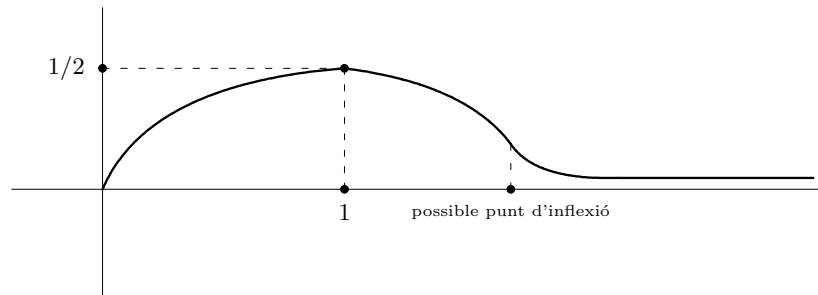
- $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1 + x^2}{(x^2 - 1)^2} \ln x$ si $x \neq 0, 1$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 0$.

- Candidats a extrems: $x = 1$ i cal provar que $f'(x) \neq 0$, per a tot x .

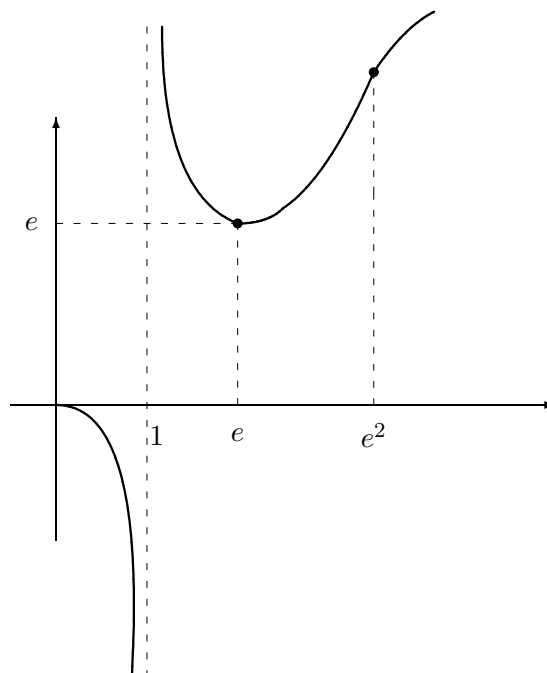
Idea de la prova: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0$. Considerem la funció $\varphi(x) = \ln x - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ i calculem $\varphi'(x) = \frac{(x^2 - 1)^2}{(x^2 + 1)^2 x} > 0$, per a tot $x > 0$; aleshores $\varphi(x)$ és estrictament creixent i s'anul·la en $x = 1$ i, per tant, no té cap més zero.

- Creixement: $]0, 1]$ creixent; $[1, +\infty[$ decreixent
- Asímptotes: $y = 0$ asímptota (horitzontal) a $+\infty$.



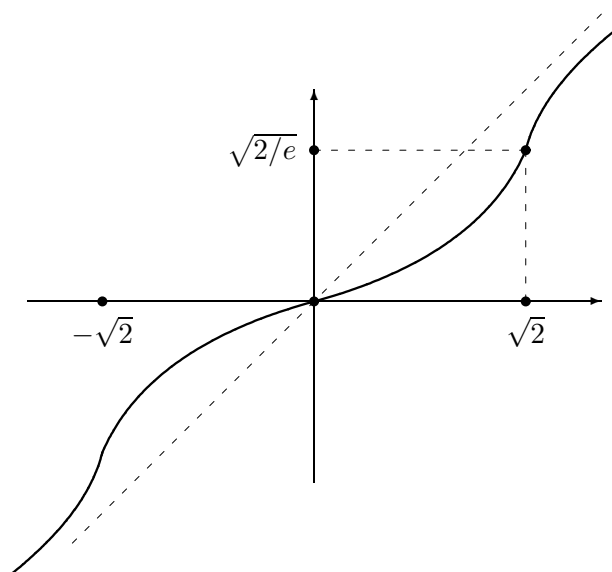
21. · Domini: $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

- $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$.
- Candidats a extrems: $x = e$
- Creixement: $]0, 1[$ decreixent; $]1, e[$ decreixent; $]e, +\infty[$ creixent.
- Asímptotes: $x = 1$ asímptota vertical.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.
- $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3}$, per tant, $x = e^2$ és un punt d'inflexió.



22. · Domini: \mathbb{R} , $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, és contínua en $x = 0$.

- És senar: $f(-x) = -f(x)$.
- $f'(x) = e^{-1/x^2} \left(\frac{2}{x^2} + 1 \right)$ si $x \neq 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$.
- Candidats a extrems: cap.
- Creixement: és sempre creixent.
- Asímptotes: $y = x$ és asímptota a $+\infty$ i a $-\infty$.



on $f''(x) = e^{-1/x^2} \left(\frac{4 - 2x^2}{x^5} \right)$, $x \neq 0$; $x = \pm\sqrt{2}$ són punts d'inflexió.

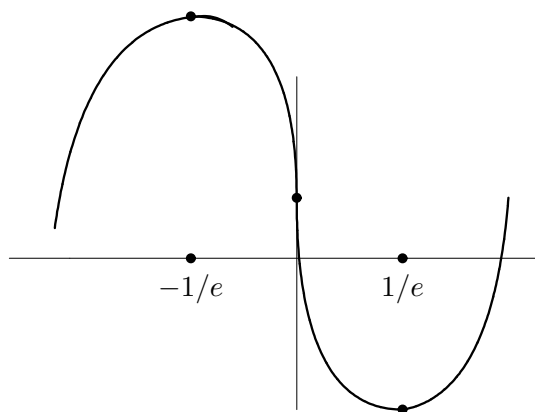
23. a) · Domini: \mathbb{R} , $f(x) = (x^2)^x = e^{x \ln x^2}$, $x \neq 0$, $f(0) = 1$.

- $f'(x) = (x^2)^x (2 + \ln x^2)$, $x \neq 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$.
- Candidats a extrems: $x = \pm 1/e$.
- $f''(x) = (x^2)^x ((2 + \ln x)^2 + (2/x))$, $x = -1/e$ màxim relatiu; $x = 1/e$ mínim relatiu.

b) · $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Per tant, f és contínua en $x = 0$.

- Creixement: $] -\infty, -1/e]$ creixent; $] -1/e, 0]$ decreixent; $[0, 1/e]$ decreixent; $[1/e, \infty)$ creixent.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f''(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = +\infty$. Per tant, f és còncaua a l'esquerra de 0 i connexa a la dreta; i $x = 0$ és un punt d'inflexió.

c) · Asímtotes: $y = 0$ és asímptota (horitzontal) a $-\infty$.



24. -

25. · Domini: $] - \infty, 1[\cup] 1, +\infty[$

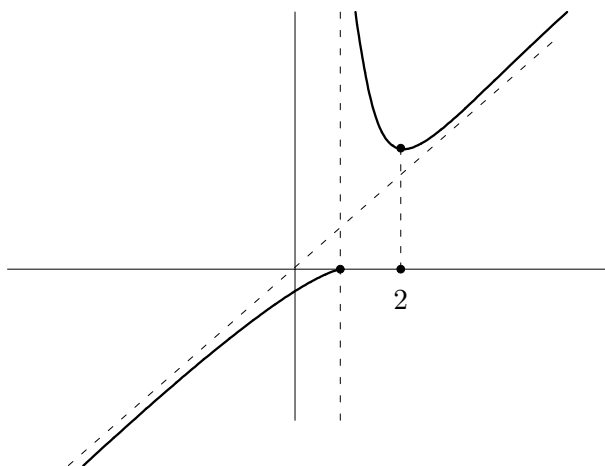
· $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

· $f'(x) = e^{x/(x-1)} \frac{x-2}{x-1}$, $x \neq 1$.

· Candidats a extrems: $x = 2$, $x = 1$.

· Creixement: $] - \infty, 1[$ creixent; $] 1, 2[$ decreixent; $] 2, +\infty[$ creixent.

· Asímptotes: $x = 1$ és asímptota vertical (per la dreta); $y = ex$ és asímptota a $+\infty$ i a $-\infty$.



26. -

3. L'espai \mathbb{R}^n

1. -

2. A és tancat, no obert; B no és obert ni tancat; C no és obert ni tancat; D és tancat, no obert.

3. a) $A - C$ no és tancat,

$$\text{Fr}(A - C) = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) : x^2 + y^2 = 2, x \leq 1\} \cup \{(1, y) : -1 \leq y \leq 1\}.$$

b) $A - B$ és obert.

c) A no és compacte perquè és acotat però no és tancat; $\overline{C} = C \cup \text{Fr } C = \{(x, y) : 1 \leq x \leq \sqrt{2}\}$ no és compacte perquè no és acotat. Conté totes les rectes verticals $x = c$ amb $1 \leq c \leq \sqrt{2}$.

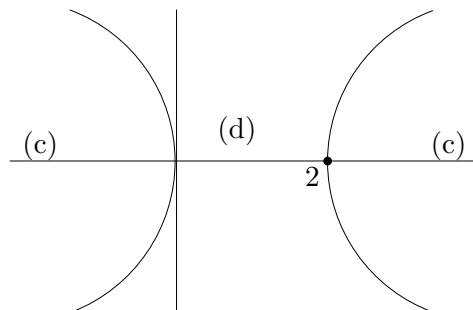
d) $C - A$ no és tancat, $\text{Fr}(C - A) = \{(1, y) : y \geq 1\} \cup \{(1, y) : y \leq -1\} \cup \{(\sqrt{2}, y)\} \cup \{(x, y) : x^2 + y^2 = 2, 1 \leq x \leq \sqrt{2}\}$.

4. a) $(x - 1)^2 + y^2 \geq 1$ és l'exterior de la circumferència. No és acotat.

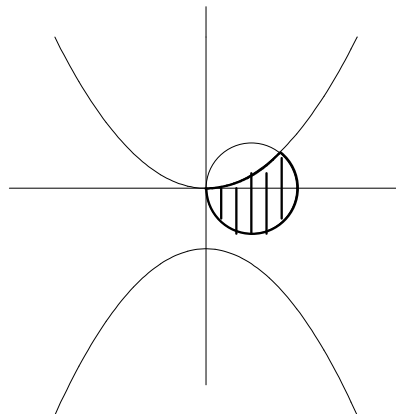
b) $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ és l'interior de la circumferència. És acotat.

c) $(x - 1)^2 - y^2 \geq 1$. No és acotat.

d) $(x - 1)^2 - y^2 \leq 1$. No és acotat.



5. $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq x, x^2 - y^2 \geq y\}$ és tancat i és acotat perquè està contingut en $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq x\}$, que és una circumferència centrada a $(1/2, 0)$ i de radi $1/2$.



6. $\{(x, y), x^3 + x^2y^2 = z^2, 0 \leq y \leq 4, x \leq 2\}$; com $x^2(x + y^2) = z^2$, tenim $x + y^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -y^2 \geq -4^2$, per tant, $-16 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 4$; aleshores $z^2 = x^3 + x^2y^2 \leq 2^3 + 2^2 \cdot 4^2 = 72$ i per tant, $-\sqrt{72} \leq z \leq \sqrt{72}$ és un conjunt acotat.