5. Funcions vectorials de diverses variables

1.

2.

3. *

4.

5.

6.

7. 1.

8. (b).

9.

(a) $f^{-1}(x) = x - 1$; $f \circ f - f^{-1} = f(f(x)) - f^{-1}(x) = f(x+1) - (x-1) = 3$.

(b) $\dfrac{f + f^{-1}}{f - f^{-1}} = x$.

10.

(a) $f \circ f = f(f(x)) = f\left(\dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{x+1}{x+2}$.

(b) $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{x}$.

(c) $(1-f)^{-1}f^{-1} = \dfrac{x}{1-x}\dfrac{1-x}{x} = 1$.

(d) $f \circ (1-f) = f\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = \dfrac{1+x}{1+2x}$.

(e) $g(x) = \dfrac{1-f}{2}(2x) = \dfrac{x}{1+2x}$.

11.

(a) $f \circ f \circ f = f(f(f(x,y))) = f(f((x+y, x-y))) = f(2x, 2y) = 2(x+y, x-y) = 2f$.

(b) Provem que f és lineal aplicant la caracterització per a aplicacions lineals entre espais vectorials.

(i) $N(f) = \{(0,0)\}$ única solució del sistema d'equacions lineals homogeni $\{x + y = 0,\ x - y = 0\}$.

(ii) Demostrem que per a tot α i β nombres reals i $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tenim que $f((\alpha x_1 + \beta x_2,\ \alpha y_1 + \beta y_2)) = \alpha f(x_1, y_1) + \beta f(x_2, y_2)$. Per la definició de f, tenim que

$$\begin{aligned} f((\alpha x_1 + \beta x_2,\ \alpha y_1 + \beta y_2)) &= (\alpha(x_1 + y_1) + \beta(x_2 + y_2),\ \alpha(x_1 - y_1) + \beta(x_2 - y_2)) = \\ &= \alpha(x_1 + y_1, x_1 - y_1) + \beta(x_2 + y_2,\ x_2 - y_2) = \\ &= \alpha f(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) \end{aligned}$$

Per tant, f és lineal per (i) i (ii). Per (i), f és injectiva i per ser un endormorfisme, f és sobrejectiva, i per tant, f és bijectiva, $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$. f en la base canònica de $\mathbb{R}^2$ és definida per la matriu $[1 \quad 1, \quad 1 \quad -1]$, la inversa de la qual és $(1/2)[1 \quad 1, \quad 1 \quad -1]$. D'aquí que $f^{-1}(x,y) = (x+y,\ x-y)/2 = f(x,y)/2$.

12.

(a) Dom $(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \neq y\}$, Dom $(F) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = y, \ x = -y\}$, ja que $F(x, y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2 - y^2} := \dfrac{x+y}{x-y}$.

(b) $f = F$ si $(x, y) \in$ Dom (F).

13. *

14. *

15. *

16. **