6. Continuïtat i límits de funcions

1. El punt que pot presentar problemes és $x=0$. Perquè f sigui contínua cal que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} f(x) = a \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \exp(0) = 1 \end{array}\right\}; \text{ per tant si prenem } f(a)=1 \text{ i } a=1,\ f \text{ és contínua.}$$

2. • $x = \pi/2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0 \\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} A\sin x + B = A+B \end{array}\right\} \longrightarrow A+B=0.$$

• $x = -\pi/2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} A\sin x + B = -A+B \\ \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} -2\sin x = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow -A+B=2.$$

Per tant, cal que es compleixi $A=-1$, $B=1$.

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\ln|x|} = 0 = f(0) \longrightarrow f$ és contínua en 0.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to \pm 1^+} \dfrac{1}{\ln|x|} = +\infty \\ \\ \lim_{x\to \pm 1^-} \dfrac{1}{\ln|x|} = -\infty \end{array}\right\} \quad f \text{ no és contínua ni en } x=1 \text{ ni en } x=-1.$$

4. $$\lim_{x\to(\pi/2)+k\pi} \frac{1}{1+2^{\tan x}} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ és parell} \\ 1 & \text{si } k \text{ és imparell} \end{cases}$$

$$\uparrow$$

$$\lim_{x\to(\pi/2)+k\pi} \tan x = \begin{cases} +\infty & \text{si } k \text{ és parell} \\ -\infty & \text{si } k \text{ és imparell} \end{cases}$$

$\lim_{x\to(\pi/2)+k\pi} f(x) = f((\pi/2)+k\pi)$ si k és parell, f contínua. Però f té discontinuïtats en $x=(\pi/2)+k\pi$ per a k imparell, és a dir en els $x = 3\pi/2 + 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

5. $\left|f(x) - \dfrac{1}{4}\right| = \left|\dfrac{x-1}{2(x+1)} - \dfrac{1}{4}\right| = \left|\dfrac{x-3}{4(x+1)}\right| < 0.01$. Si $|x-3|<\delta$, $|x+1| = |x+4-3| = |x-3+4| \geq 4 - |x-3| > 4-\delta$. Per tant, $\left|\dfrac{x-3}{4(x+1)}\right| < \dfrac{\delta}{4(4-\delta)}$. Perquè això sigui $\varepsilon = 0.01$: $\dfrac{\delta}{4(4-\delta)} = \varepsilon \iff \delta = 16\varepsilon - 4\delta\varepsilon$; $\delta + 0.04\delta = 0.167 \Longrightarrow \delta = \dfrac{0.16}{1.04} \simeq 0.1538$.

6. $$|f(x)-1| = \left|\frac{x^2-1}{x^2+3} - 1\right| = \left|\frac{x^2-1-x^2-3}{x^2+3}\right| = \frac{4}{x^2+3} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si } x>M}}{<} \frac{4}{M^2+3} \leq \varepsilon.$$

$4 = \varepsilon M^2 + 3\varepsilon$; $M^2 = \dfrac{4-3\varepsilon}{\varepsilon} = \dfrac{4}{\varepsilon} - 3$; $M = +\sqrt{\dfrac{4}{\varepsilon} - 3}$.

7. *

i) Dues maneres:
1. $\exists f^{-1}$ tal que $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1/x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ x & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

2. *Exhaustiva:* $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in \mathbb{R}$, tal que $y = f(x)$?

- $y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \ \rightarrow$ prenent $x = y\,,\ f(x) = y\,.$
- $y \in \mathbb{Q} - \{0\} \ \rightarrow$ prenent $x = \dfrac{1}{y}\,,\ f(x) = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{1/y} = y\,.$
- $y = 0 \ \rightarrow$ prenent $x = 0\,,\ f(0) = 0 = y\,.$

És doncs, exhaustiva.

Injectiva: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$?

$$\text{Si} \quad f(x) = f(y) \Rightarrow \begin{cases} \text{o bé} & x = y = 0 \\ \text{o bé} & x, y \in \mathbb{Q} - \{0\} \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y} = f(y) \Rightarrow x = y \\ \text{o bé} & x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = x = y = f(y) \end{cases}$$

Per tant, és injectiva.

ii) f està definida de dues maneres diferents; sobre els conjunts $\mathbb{Q} - \{0\}$ i $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Només podrà ser contínua en els punts on els limits sobre els conjunts coincideixin

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \lim_{x \to a} x \Leftrightarrow \frac{1}{a} = a \Leftrightarrow a = \pm 1\,.$$

f només és contínua en $+1$ i -1.

8. Sigui $x_0 \in \mathbb{R}$ qualsevol. Sigui (x_n) una successió qualsevol tal que $(x_n) \rightarrow x_0$. Llavors $f(x_n) = x_n \cdot f(1) \rightarrow x_0 \cdot f(1) = f(x_0)$. Per tant, f és contínua en x_0.

9. $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow xy \leq \dfrac{x^2 + y^2}{2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{|xy|} \leq \sqrt[3]{\dfrac{x^2 + y^2}{2}}$. D'on

$$|\sqrt[3]{xy} - 0| = \sqrt[3]{|xy|} \leq \sqrt[3]{\frac{x^2 + y^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{2/3}.$$

Per tant, prenent $\delta = \sqrt{2\varepsilon^3}$, resulta:

$$\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(0, 0)| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{2/3} < \frac{\delta^{2/3}}{\sqrt[3]{2}} = \varepsilon\,.$$

10. $f(x) = 2;\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 3 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$; $\lim\limits_{1} f = 2,\ \lim\limits_{2} g = 2,\ \lim\limits_{1} (g \circ f) = 3 \neq 2.$

11. Sigui $A_1 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, (x, a_2, \ldots, a_n) \in A\}$; f contínua en $a \Rightarrow \ \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0$, tal que

$$|f(x, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_m)| = |g(x) - g(a_1)| < \varepsilon\,,$$

sempre que $\|(x, a_2, \ldots, a_n) - (a_1, a_2, \ldots, a_n)\| = |x - a_1| < \delta\,,\ \ x \in A_1$, fet que implica que g és contínua en $x = a_1$.

12. $\lim_{x\to a} f(x)=b \Rightarrow \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0$, tal que $||f(x)|-|b|| \le |f(x)-b|<\varepsilon$, sempre que $\|x-a\|<\delta$, $x\in A,\ \ x\neq a$. La qual cosa implica que $\lim_{x\to a}|f(x)|=|b|$. Si $b=0$ i $\lim_{x\to a}|f(x)|=0 \Rightarrow \forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, tal que $|f(x)-0|=||f(x)|-0|<\varepsilon$, sempre que $\|x-a\|<\delta,\ \ x\in A,\ \ x\neq a$. La qual cosa implica que $\lim_{x\to a} f(x)=0$.

13. Bolzano (per exemple, amb $x_1=0,\ x_2=2\pi$).

14. Bolzano (per exemple, amb $x_1=0,\ x_2=2$).

15. *

Hi ha continuïtat en $]\lambda_1,\lambda_2[$, i $\lim_{\lambda_1^+} f=+\infty$, $\lim_{\lambda_2^-} f=-\infty$. Ídem en $]\lambda_2,\lambda_3[$.

16. $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0$ tal que si $|x_1-x_2|<\delta$, llavors $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ per ser f contínua. Com que $f(x_1),f(x_2)\in\mathbb{Q}$ i entre dos racionals sempre hi ha un no racional, ha de passar $f(x_1)=f(x_2)$.

17. *

Ja que és contínua, si mai $f(x_0)=x_0$ llavors sempre $f(x)>x$ (o $f(x)<x$). En el cas primer $f(f(x))>f(x)>x$, contràriament a allò que es diu. Ídem si $f(x)<x$.

18. **

Sigui $g(x)=f(x)-f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)$, definida en $\left[0,1-\dfrac{1}{n}\right]$ i contínua. Considerem $g(0)=f(0)-f\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $g\left(\dfrac{1}{n}\right)=f\left(\dfrac{1}{n}\right)-f\left(\dfrac{2}{n}\right)$, $\dots$, $g\left(\dfrac{n-1}{n}\right)=f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)-f(1)$. Si $g(0),g\left(\dfrac{1}{n}\right),\dots,g\left(\dfrac{n-1}{n}\right)>0$, llavors $f(0)>f\left(\dfrac{1}{n}\right)>f\left(\dfrac{2}{n}\right)>\cdots>f(1)$, una contradicció. Així, algun d'ells és negatiu i per Bolzano existeix a tal que $g(a)=0$.

19. És contínua a $\mathbb{R}^2$, ja que ho són totes les components. En $\mathbb{R}^{2^*}$ es veu per generació, i en $(0,0)$ buscant en cada cas el límit i veient que coincideix amb la imatge.

20. És contínua a $\mathbb{R}^{2^*}\setminus\left\{\left(x,\pm\sqrt{x^2-1}\right)\ :\ x^2\ge 1\right\}$, on són contínues totes les components. La primera ho és a $\mathbb{R}^{2^*}$, i la segona a $\mathbb{R}^2\setminus\left\{\left(x,\pm\sqrt{x^2-1}\right)\right\}$.

21. És contínua a $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\ :\ x\neq 0\}$.

22. Només existeix en $(0,0)$, ja que és l'únic cas en què un factor està acotat i l'altre tendeix a zero (quan es busca el límit).

23.

(a) És contínua a $\mathbb{R}^2$ (en $\mathbb{R}^{2^*}$ per generació, en $(0,0)$ aplicant polars).

(b) És contínua a $\mathbb{R}^{2^*}$ (es veu per generació). En $(0,0)$ no ho és (es pot veure aplicant polars).

24. *

(a) Discontínua en la recta $y=-x$. Calculem els límits laterals sobre la recta $x=k$ al punt $(k,-k)$ per a $k\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{y\to -k^+} f(k,y)=\lim_{y\to -k} y=-k,\quad \text{perquè}\quad x=k<|y|\,;$$
$$\lim_{y\to -k^-} f(k,y)=\lim_{y\to -k} k=k,\quad \text{perquè}\quad x=k>|y|\,.$$

(b) Discontínua en el punt $(0,0)$.

(c) Funció contínua. Veiem que el límit en $(0,0)$ val zero: $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \dfrac{r\cos\theta|r\sin\theta|}{r} = r\cos\theta|\sin\theta|$;

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = r|\cos\theta\sin\theta| \leq r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

25 .

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$

$\displaystyle\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} -\frac{y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0} -1 = -1$

Per tant, $\displaystyle\nexists \lim_{(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0$

$\displaystyle\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = 0$

Però, $\displaystyle\nexists \lim_{(0,0)}\frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2}$ perquè

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+0} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} f(x,-x) = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+(2x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+4} = 0\,.$$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{1}{x}\sin xy\right) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0.$

$\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin xy\right) = \lim_{y\to 0} y = 0$

$$\lim_{(0,0)}\frac{1}{x}\sin xy = \lim_{(0,0)} y\frac{\sin xy}{xy} = \lim_{y\to 0} y = 0\,.$$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right) = \lim_{x\to 0}\left(0 + x\sin\frac{1}{x}\lim_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}\right)$ no existeix; igualment, no existeix

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\,.$$

Però, $\displaystyle\lim_{(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0$, per l'entrepà: $\displaystyle\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \leq |x+y| \longrightarrow 0$.

26 .

(a) No existeix: $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,x) = 0$ i $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,2x) = -\frac{1}{3}$.

(b) $\displaystyle\lim_{(0,0)}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0$, usant polars: $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = r^2|\cos^4\theta+\sin^4\theta| \leq 2r^2 \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$.

(c) No existeix $\displaystyle\lim_{(0,0)} x\sin\frac{x}{y}$.

27. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; x^2+y^2-2x \leq 0,\, e^{xy} - \sin x \leq y^4 + e^x\} =$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; (x-1)^2+y^2 \leq 1,\, e^{xy} - e^x - y^4 - \sin x \leq 0\} =$
$= C_1(1,0) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, f(x,y) \leq 0\} =$
$= C_1(1,0) \cap f^{-1}((-\infty,0]) \subset C_1(1,0) \subset \overline{B}_i(0) \Rightarrow A$ acotat, on
$C_1(a,0) = \{(x-a)^2+y^2 \leq 1\}$ cercle de radi 1 i centre $(1,0)$ i $f(x,y) = e^{xy} - e^x - y^4 - \sin x$.
A és tancat perquè $C_1(1,0)$ és tancat i $f^{-1}((-\infty,0])$ és tancat, ja que $f(x,y) = e^{xy} - e^x - y^4 - \sin x$ és contínua $\Rightarrow A$ és compacte. El B es fa igual.

28.

(a) $$\left.\begin{array}{r} A = \left\{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \dfrac{1}{4}\right\} \cap \{y \leq 2x\} \subset \overline{B}_1(0) \Rightarrow A \text{ acotat} \\ A \text{ tancat} \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ compacte}.$$

(b) $f(x,y)$ contínua: $\lim\limits_{r\to 0} f_1(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = 0$
$\lim\limits_{(0,0)} f_2(x,y) = 1 = f(0,0)$.

(c) $$\left.\begin{array}{l} A \text{ compate} \\ f \text{ contínua} \end{array}\right\} \Rightarrow f(A) \text{ compacte}.$$