Càlcul Infinitesimal I/ Càlcul I **Codi: 21702 / 21762** **A**

Temps: 1 hora 10 d'abril de 2008

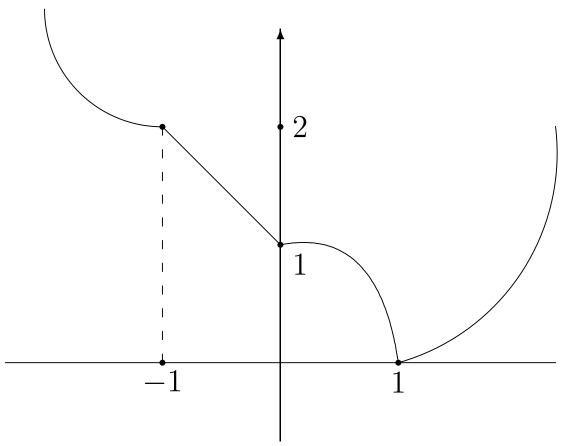
---

1. Donada la funció $f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 - x|$, feu un dibuix esquemàtic de la seva gràfica.

Resolució: $x^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 1$ i $x^2 - x = 0 \Longleftrightarrow x = 0, 1$

$$f(x) = \begin{cases} (x^2-1)+(x^2-x) = 2x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ (1-x^2)+(x^2-x) = 1 - x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ (1-x^2)+(x-x^2) = -2x^2 + x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ (x^2-1)+(x^2-x) = 2x^2 - x - 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

$f(-1) = 2;\;\; f(0) = 1;\;\; f(1) = 0$



---

2. Calculeu $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1\cdot\sin(1/\sqrt{1}) + 2\cdot\sin(1/\sqrt{2}) + \cdots + n\cdot\sin(1/\sqrt{n})}{n^{(3/2)}}$

Resolució: El denominador és estrictament creixent i té límit $+\infty$. Apliquem Stolz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^{3/2} - (n-1)^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2} + (n-1)^{3/2}}{n^3 - (n-1)^3} n\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2} + (n-1)^{3/2}}{3n^2 - 3n + 1} n\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{3/2}}{3 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{2}{3}$$

on usem que, per pas a variable contínua

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

3. Sigui $f(x) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right) + \arctan\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}\right)$, definida per a tot $x \in [\sqrt{2}, +\infty)$.

Demostreu que $f(x)$ és constant en aquest interval i trobeu el valor d'aquesta constant. (Indicació: $\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ i $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$.)

Resolució:

$$f'(x) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{x^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^2}} + \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}\right)^2}\,\frac{x}{2\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}} =$$

$$= -\frac{\frac{\sqrt{2}}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2}}} + \frac{1}{\frac{x^2}{2}}\,\frac{x}{2\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{x\sqrt{x^2-2}} + \frac{\sqrt{2}}{x\sqrt{x^2-2}} = 0 \quad \forall\, x \in (\sqrt{2},\, +\infty) \Rightarrow$$

f és constant en $(\sqrt{2},\, +\infty)$ i contínua si $x = \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ f és constant en $[\sqrt{2},\, +\infty)$.

$f(\sqrt{2}) = \arcsin(1) + \arctan(0) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \forall\, x \in [\sqrt{2},\, +\infty)$.

---

4. Sigui $f(x) = \frac{\ln(1+e^{(1/x)})}{1+e^{(1/x)}}$ definida per a $x \neq 0$. Calculeu $\lim_{x\to 0^+} f$ i $\lim_{x\to 0^-} f$ i digueu si podem definir o no $f(0)$ per tal que f sigui contínua en $x = 0$.

Resolució:

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty} \Rightarrow$ L'Hôpital: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+e^{(1/x)}} e^{(1/x)}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{e^{(1/x)}\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{(1/x)}} = \frac{1}{+\infty} = 0$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{\ln(1+0)}{1} = \frac{0}{1} = 0$

Així, si definim $f(0) = 0$, llavors f és contínua en $x = 0$.