

Nom i Cognoms:

1. Calculeu, segons els valors de a i b , el valor del límit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)^a}{(1 - \cos x)^b}$.

Resposta:

- Si $a = b \implies L = 1$.
- Si $a > b \implies L = 0$.
- Si $a < b \implies L = +\infty$.

Resolució: $\frac{(e^x - 1 - x)^a}{(1 - \cos x)^b} = \frac{((x^2/2) + R_3(x))^a}{((x^2/2) + R_4(x))^b} = \left(\frac{x^2}{2}\right)^{a-b} \frac{(1 + R_1(x))^a}{(1 + R_2(x))^b} \xrightarrow{x \rightarrow 0} L$.

2. Calculeu totes les derivades d'ordre 3 a l'origen de la funció $f(x, y) = \ln(2x + y^3 + \cos y)$.

Resposta: $D_{xxx}f(0, 0) = 16$; $D_{xxy}f(0, 0) = 0$; $D_{xyy}f(0, 0) = 2$; $D_{yyy}f(0, 0) = 6$.

Resolució: $f(x, y) = \ln(1 + 2x - \frac{y^2}{2} + y^3 + R_4(y)) = 2x - \frac{y^2}{2} + y^3 - \frac{1}{2} \left(2x - \frac{y^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}(2x)^3 + R_4(x, y) = 2x - 2x^2 - \frac{y^2}{2} + \frac{8}{3}x^3 + xy^2 + y^3 + R_4(x, y)$.

Així: $\frac{1}{3!}D_{xxx}f(0, 0) = \frac{8}{3}$; $\frac{3}{3!}D_{xxy}f(0, 0) = 0$; $\frac{3}{3!}D_{xyy}f(0, 0) = 1$; $\frac{1}{3!}D_{yyy}f(0, 0) = 1$.

3. Calculeu les derivades direccionals a l'origen de la funció $f(x, y) = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; $f(0, 0) = 0$.

Resposta: $u_1(u_1^2 - u_2^2)$.

Resolució: Sigui $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\|\vec{u}\| = 1$. Usem definició:

$D_{\vec{u}}f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t\vec{u}) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1(u_1^2 - u_2^2)}{u_1^2 + u_2^2} = u_1(u_1^2 - u_2^2)$.

4. Calculeu el límit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^3} - \frac{n}{4}$.

Resposta: $1/2$.

Resolució: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^3} - \frac{n}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{41^3 + 42^3 + \dots + 4n^3 - n^4}{4n^3}$. Apliquem Stolz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - n^4 + (n-1)^4}{4n^3 - 4(n-1)^3} = \frac{4n^3 - n^4 + n^4 - 4n^3 + \binom{4}{2}n^2 + \dots}{4n^3 - 3n^3 + 12n^2 + \dots} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4 \cdot 3}{2}n^2 + \dots}{12n^2 + \dots} = \frac{1}{2}.$$

5. Demostreu que l'equació $(x^2 + 1) \cos z + x - e^{yz} + 1 = 0$ en un entorn de $(0, 0, \pi/2)$ defineix la variable z com a funció implícita de (x, y) ; $z = g(x, y)$ i calculeu la derivada direccional màxima de g a l'origen.

Resposta: $\frac{\sqrt{4 + \pi^2}}{2}$.

Resolució: • $f(x, y, z) = (x^2 + 1) \cos z + x - e^{yz} + 1$.

• $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$; $f(0, 0, (\pi/2)) = \cos(\pi/2) - 1 + 1 = 0$; $\frac{\partial f}{\partial z} = -(x^2 + 1) \sin z - ye^{yz}$ i $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, (\pi/2)) = -1 \neq 0 \implies$ podem aplicar el teorema de la funció implícita i aïllar $z = g(x, y)$ com a solució de l'equació $f(x, y, z) = 0$ verificant $g(0, 0) = \pi/2$ i

$$\begin{aligned} & \text{Derivem resp. } x : 2x \cos g(x, y) - (x^2 + 1) \sin(g(x, y)) D_x g(x, y) + \\ & \quad + 1 - y D_x g(x, y) e^{yg(x, y)} = 0 \\ (x^2 + 1) \cos g(x, y) + x - e^{yg(x, y)} + 1 = 0 & \nearrow \text{ En } (0, 0) : -D_x g(0, 0) + 1 = 0 \implies D_x g(0, 0) = 1 \\ & \searrow \text{ Derivem resp. } y : -(x^2 + 1) \sin(g(x, y)) D_y g(x, y) - \\ & \quad - e^{yg(x, y)} (g(x, y) + y D_y g(x, y)) = 0 \\ & \text{ En } (0, 0) : -D_y g(0, 0) - \pi/2 = 0 \implies D_y g(0, 0) = -\pi/2. \end{aligned}$$

La derivada màxima és $\|\text{grad } g(0, 0)\| = \sqrt{1^2 + \frac{\pi^2}{4}} = \frac{\sqrt{4 + \pi^2}}{2}$.