

TEST (10 punts)

1. Calculeu $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x+y \neq 0}} \frac{1}{\sin^2(x+y)} - \frac{1}{(x+y)^2}$.

Resposta: $\frac{1}{3}$.

Resolució: $\lim_{(0,0)} \frac{1}{\sin^2(x+y)} - \frac{1}{(x+y)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 - \sin^2 z}{z^2 \sin^2 z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z^4/3)}{z^4} = \frac{1}{3}$.

2. Quina condició satisfan tots els $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ per tal que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1) \sin^2(ax)}{(\cos^2 x - 1) \ln(1 + bx^2)} = \frac{1}{2}$.

Resposta: $b = -2a^2$.

Resolució: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1) \sin^2 ax}{(\cos^2 x - 1) \ln(1 + bx^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + O_4)(a^2 x^2 + O_4)}{(-x^2 + O_4)(bx^2 + O_4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 x^4}{-bx^4} = -\frac{a^2}{b} = \frac{1}{2}$, per tant, $b = -2a^2$.

3. Calculeu totes les derivades d'ordre 9 a l'origen de la funció $f(x, y) = \ln(1 + x^2y)$.

Resposta: $2 \cdot 6! = 1440 = \frac{\partial^9 f}{\partial x^6 \partial y^3}$ i totes les iguals pel teorema de Schwartz. La resta són zero.

Resolució: Per Taylor, $\ln(1 + x^2y) = x^2y - \frac{x^4y^2}{2} + \frac{x^6y^3}{3} + R_{10}$. Per tant,

$$\frac{1}{9!} \binom{9}{6} \frac{\partial^9 f}{\partial x^6 \partial y^3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\partial^9 f}{\partial x^6 \partial y^3}(0,0) = \frac{1}{3} \frac{9!}{\binom{9}{6}} = \frac{1}{3} \frac{9!}{(9!/6!3!)} = \frac{1}{3} 6! 3! = 2 \cdot 6!.$$

4. Siguin f_1, f_2 i f_3 funcions reals de classe C^1 tals que existeix $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$, tals que $f_1(\alpha_1) = f_2(\alpha_2) = f_3(\alpha_3) = 0$. Sigui $g = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$. Calculeu el número mínim de zeros de g' en els següents casos:

(a) $\alpha_1 \neq \alpha_2, \alpha_1 \neq \alpha_3, \alpha_2 \neq \alpha_3$. (b) $\alpha_1 = \alpha_2, \alpha_1 \neq \alpha_3$. (c) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.

Resposta: (a) 2. (b) 1. (c) Cap.

Resolució: En el cas (a) la funció g té tres zeros diferents: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i pel teorema de Rolle g' tindrà, com a mínim, un zero entre (α_1, α_2) i un altre entre (α_2, α_3) .

En el cas (b) només podem aplicar el teorema de Rolle entre (α_2, α_3) i podem assegurar que g' té almenys un zero.

En el cas (c), g té un sol zero i no té perquè existir cap zero de g' .

5. Sigui $z = z(x, y)$ la funció definida implícitament per l'equació $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2 + zx^3 = 0$ en un entorn de $(0, 0, 0)$. Discutiu si $z(x, y)$ té un extrem relatiu en $(0, 0)$.

Resposta: $z(x, y)$ té un mínim relatiu en $(0, 0)$.

Resolució: Sabem que $z(0, 0) = 0$ i derivem $z(x, y) - x^2 - y^2 - z(x, y)x^3 = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x} : D_x z(x, y) - 2x - D_x z(x, y)x^3 - z(x, y)3x^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} : D_y z(x, y) - 2y - D_y z(x, y)x^3 = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} : D_{xx} z(x, y) - 2 - D_{xx} z(x, y)x^3 - D_x z(x, y)3x^2 - D_x z(x, y)3x^2 - z(x, y)6x = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} : D_{yy} z(x, y) - 2 - D_{yy} z(x, y)x^3 = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} : D_{yx} z(x, y) - D_{yx} z(x, y)x^3 - D_y z(x, y)3x^2 = 0$$

Fent $x = y = 0$ obtenim $D_x z(0, 0) = D_y z(0, 0) = 0$, $D_{xx} z(0, 0) = 2$, $D_{xy} z(0, 0) = 0$, $D_{yy} z(0, 0) = 2$; $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Per tant, $(0, 0)$ és un mínim relatiu.

6. Donada $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ del classe C^1 , tal que $f(0) = 2$ i $f'(0) = 5$, i $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x, y) = 2 \cos(x + y) + \sin(x + y)$, calculeu $D(f^{-1} \circ g)(0, 0)$.

Resposta: $D(f^{-1} \circ g)(0, 0) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Resolució:

$$\begin{aligned} D(f^{-1} \circ g)(0, 0) &= Df^{-1}(g(0, 0))Dg(0, 0) = Df^{-1}(2)Dg(0, 0) = (Df(0))^{-1}Dg(0, 0) = \\ &= \frac{1}{f'(0)}(-2 \sin(x + y) + \cos(x + y) - 2 \sin(x + y) + \cos(x + y))(0, 0) = \frac{1}{5}(1, 1). \end{aligned}$$

7. Calculeu l'error màxim que es comet en aproximar la funció $f(x, y) = x \cos y$ en un punt (\bar{x}, \bar{y}) , del qual sabem $|\bar{x} - 1| \leq 0.1$, $|\bar{y} - 0| \leq 0.1$, pel seu valor en el punt $(1, 0)$.

Resposta: $|f(\bar{x}, \bar{y}) - 1| \leq 0.21$.

Resolució: $|f(\bar{x}, \bar{y}) - f(1, 0)| = |f(\bar{x}, \bar{y}) - 1| = |D_x f(c_1, c_2)(\bar{x} - 1) + D_y f(c_1, c_2)(\bar{y} - 0)|$.

Sabem que $\begin{cases} c_1 = \sigma \bar{x} + (1 - \sigma)1 \\ c_2 = \sigma \bar{y} + (1 - \sigma)0 \end{cases}$, $\sigma \in (0, 1)$; i també sabem $\begin{cases} -0.1 \leq \bar{x} - 1 \leq 0.1 \\ -0.1 \leq \bar{y} \leq 0.1 \end{cases}$, és a dir, $\begin{cases} 0.9 \leq \bar{x} \leq 1.1 \\ -0.1 \leq \bar{y} \leq 0.1 \end{cases}$,

per tant $\begin{cases} 0.9 \leq c_1 \leq 1.1 \\ -0.1 \leq c_2 \leq 0.1 \end{cases}$.

Aleshores, $|f(\bar{x}, \bar{y}) - 1| \leq |\cos c_2| |\bar{x} - 1| + |c_1| |\sin c_2| |\bar{y}| \leq 1 \cdot 0.1 + 1.1 \cdot 1 \cdot 0.1 = 0.21$.

8. Donat el sistema $\left. \begin{aligned} xz^3 + y^2u^3 &= 1 \\ xy^3 + 2u^2z &= 0 \end{aligned} \right\}$, demostreu que en un entorn de $(0, 1, 0, 1) = (x_0, y_0, z_0, u_0)$ defineix z, u com a funcions implícites de (x, y) : $z = g(x, y)$, $u = h(x, y)$, i calculeu $\frac{\partial h}{\partial x}(0, 1)$.

Resposta: $\frac{\partial h}{\partial x}(0, 1) = 0$

Resolució: $f(x, y, z, u) = \begin{pmatrix} xz^3 + y^2u^3 - 1 \\ xy^3 + 2u^2z \end{pmatrix}$; f és C^∞ ; $f(0, 1, 0, 1) = (1 - 1, 0) = (0, 0)$;

$$\left| \frac{\partial f}{\partial(z, u)}(0, 1, 0, 1) \right| = \begin{vmatrix} 3xz^2 & 3y^2u^2 \\ 2u^2 & 4uz \end{vmatrix} (0, 1, 0, 1) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

Per tant, el teorema de la funció implícita assegura que $f = 0$ defineix implícitament $z = g(x, y)$, $u = h(x, y)$ tals que són C^∞ , $g(0, 1) = 0$, $h(0, 1) = 1$. Calculem la derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g, h)}{\partial(x, y)}(0, 1) &= - \left(\frac{\partial f}{\partial(z, u)} \right)^{-1} (0, 1, 0, 1) \left(\frac{\partial f}{\partial(x, y)} \right) (0, 1, 0, 1) = - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z^3 & 2yu^3 \\ y^3 & 3xy^2 \end{pmatrix} (0, 1, 0, 1) = \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$