Test (8 punts)

1. Calculeu, en funció de k, el límit de la successió

$$x_n = \frac{n^2 \tan\dfrac{k}{n} + (n-1)^2 \tan\dfrac{k}{n-1} + \cdots + 2^2 \tan\dfrac{k}{2} + 1^2 \tan\dfrac{k}{1}}{n^2}\,.$$

Resolució: Apliquem el criteri de Stolz ja que el denominador és creixent i té límit infinit

$$\begin{aligned}\lim_n x_n &= \lim_n \frac{n^2\tan(k/n)}{n^2-(n-1)^2} = \lim_n \frac{n^2\tan(k/n)}{2n-1} = \lim_n \frac{n}{2n-1}\cdot\frac{\tan(k/n)}{(1/n)} = \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan(kx)}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}[1+\tan^2(kx)]\cdot k = \frac{k}{2}\,,\end{aligned}$$

on hem fet $x = \dfrac{1}{n}$, pas a variable contínua i l'Hôpital.

---

2. Demostreu que les equacions següents defineixen y i z com a funcions implícites de x en un entorn de $(x,y,z) = (0,0,0)$

$$y + \sin(x-z) = 0\,, \qquad x + z\cos(x-z) = 0$$

i calculeu les derivades de les funcions $y = y(x)$ i $z = z(x)$ en $x = 0$.

Resolució:

$f_1(x,y,z) = y + \sin(x-z)$

$f_2(x,y,z) = x + z\cos(x-z)$

verifiquem les hipòtesis del teorema de la funció implícita

(i) $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

(ii) $f_1(0,0,0) = f_2(0,0,0) = 0$

(iii) $\dfrac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos(x-z) \\ 0 & \cos(x-z) + z\sin(x-z)\end{pmatrix}$; $\det\left(\dfrac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y,z)}(0,0,0)\right) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0\,.$

Podem doncs aïllar (y,z) en funció de x entorn de $(0,0,0)$ complint $y(0) = 0$ i $z(0) = 0$. Si derivem respecte x les equacions implícites de $y(x)$ i $z(x)$, obtenim:

$$y'(x) + \cos(x - z(x))\cdot(1 - z'(x)) = 0 \Longrightarrow y'(0) + 1 - z'(0) = 0$$

$$1 + z'(x)\cos(x-z(x)) - z(x)\sin(x-z(x))(1-z'(x)) = 0 \Longrightarrow 1 + z'(0) = 0$$

Així, $z'(0) = -1$ i $y'(0) = -2$.

3. Calculeu els límits en l'origen de la funció $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$ segons rectes que passen pel $(0,0)$.

Resolució:

- $y = mx, \;\; m \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+(mx)^2}{x^2+(mx)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1+m^2}{1+m^4x^2} = 1+m^2$$

- $x = 0$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0^2+y^2}{0^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y^2} = +\infty\,.$$

4. Essent $f(x,y) = (e^y \sin x\,,\; x^2+2e^y)$ i $g(u,v) = (\sin(u\cdot v),\; u+v,\; v\cdot\cos u)$, calculeu $D(g\circ f^{-1})(0,2)$. (f^{-1} indica la inversa local de f definida en un entorn de $(0,2)$.)

Resolució: És clar que $f(0,0) = (0,2)$ i que $f(x,y) \neq (0,2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Així, $f^{-1}(0,2) = (0,0)$

$$Df = \begin{pmatrix} e^y\cos x & e^y \sin x \\ 2x & 2e^y \end{pmatrix}$$

$$Df^{-1}(0,2) = (Df(0,0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$Dg = \begin{pmatrix} v\cos(u\,v) & u\cos(u\,v) \\ 1 & 1 \\ -v\sin u & \cos u \end{pmatrix} \qquad Dg(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(g\circ f^{-1})(0,2) = Dg(f^{-1}(0,2))\cdot Df^{-1}(0,2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$