

Test (8 punts)

1. Useu el teorema del valor mig per provar que $\ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$ si $x > 0$ i deduiu-ne que la successió a_n definida per $a_1 = \frac{1}{1}$, $a_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}, \dots$, $a_n = \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n}$, té $\lim_n a_n = +\infty$.

Resolució: $f(x) = \ln x$. Pel teorema del valor mig $f(x+1) - f(x) = f'(c)(x+1-x)$, on $0 < x < c < x+1$. Si ara donem a x valors naturals $x = 1, 2, \dots, n$, obtenim: $\ln(2) - \ln(1) < \frac{1}{1}$, $\ln(3) - \ln(2) < \frac{1}{2}$, \dots , $\ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$; sumant les expressions: $\ln(n+1) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = a_n$ i per tant, $\lim_n \ln(n+1) = +\infty \implies \lim_n a_n = +\infty$.

2. Sigui $z(x, y)$ la funció definida implícitament per l'equació $\sin z - \cos z + x^2 - y^2 + 1 = 0$ i $z(0, 0) = 0$. Diguen si $z(x, y)$ té un extrem relatiu en $(0, 0)$ i si és així, classifiqueu-lo.

Resolució: Derivem implícitament respecte x i y i fem $x = y = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \cos z D_x z + \sin z D_x z + 2x = 0 \\ \cos z D_y z + \sin z D_y z - 2y = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} D_x z(0, 0) = 0 \\ D_y z(0, 0) = 0 \end{array} \right\}$$

Per tant $z(x, y)$ té un candidat a extrem relatiu en $(0, 0)$. Calculem ara les derivades segones:

$$-\sin z (D_x z)^2 + \cos z D_{xx} z + \cos z (D_x z)^2 + \sin z D_{xx} z + 2 = 0$$

$$-\sin z D_x z D_y z + \cos z D_{xy} z + \cos z D_x z D_y z + \sin z D_{xy} z = 0$$

$$-\sin z (D_y z)^2 + \cos z D_{yy} z + \cos z (D_y z)^2 + \sin z D_{yy} z - 2 = 0$$

En $(0, 0)$ obtenim $D_{xx} z(0, 0) = 2$; $D_{xy} z(0, 0) = 0$; $D_{yy} z(0, 0) = -2$. Així, $H_z(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ té valors propis 2 i $-2 \implies$ Punt de sella.

3. Sigui $g(x) = \frac{ax + bx^2}{1 - cx}$. Trobeu els valors de $a, b, c, \in \mathbb{R}$ que fan que el polinomi de Taylor de grau 3 de $g(x)$ en $x = 0$ coincideixi amb el de $f(x) = \ln(1 + x)$.

Resolució: $f(x) = \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$

$$g(x) = \frac{ax + bx^2}{1 - cx} = (ax + bx^2)(1 + cx + c^2 x^2 + \dots) = ax + (ac + b)x^2 + (ac^2 + bc)x^3 + \dots$$

Cal: $a = 1$; $ac + b = -\frac{1}{2}$; $ac^2 + bc = \frac{1}{3}$, d'on

$$\left. \begin{array}{l} c + b = -\frac{1}{2} \\ c(b + c) = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \implies -\frac{1}{2}c = \frac{1}{3} \implies c = -\frac{2}{3}; b = -\frac{1}{2} - c = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \implies b = \frac{1}{6}.$$

4. Sigui $f(x, y) = (1 + \ln x + y^2, e^y)$ i $g(x, y) = (f \circ f)(x, y)$. Demostreu que existeix g^{-1} inversa local de g verificant $g^{-1}(2, e) = (1, 0)$ i calculeu $Dg^{-1}(2, e)$.

Resolució: $Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 2y \\ 0 & e^y \end{pmatrix}$; $f(1, 0) = (1, 1)$; $g(1, 1) = f(f(1, 1)) = f(1, 1) = (2, e)$

$$Dg(1, 0) = D(f \circ f)(1, 0) = Df(f(1, 0))Df(1, 0) = Df(1, 1)Df(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

$\det Dg(1, 0) = e \neq 0 \implies \exists g^{-1}$ inversa local de g definida entorn del punt $g(1, 0) = (2, e)$.

$$Dg^{-1}(2, e) = (Dg(1, 0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & e \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{e} \begin{pmatrix} e & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{e} \\ 0 & \frac{1}{e} \end{pmatrix}.$$