TEST (10 punts)

1. Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció $C^\infty(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$. Sabem que si $x < a$, aleshores $f(x) < 0$. Per una altra banda $f(a) = 0$ i $f'(a) > 0$ i $\forall\, x > a$, $f'(x) \neq 0$. Digueu si són certes les afirmacions següents, justificant la vostra resposta:
(a) $f(x) > 0, \forall\, x > a$. (b) $\exists\, b \in \mathbb{R}$, tal que $f'(b) < 0$ i $f(b) > 0$. (c) $f'(x)$ no pot tenir cap zero a $\mathbb{R}$.

Resposta: (a) és certa; (b) és falsa i (c) no se sap.

Resolució: Sabem que: $x < a \Longrightarrow f(x) < 0$ (1); $f(a) = 0$, $f'(a) > 0$ (2); si $x > a \Longrightarrow f'(x) \neq 0$ (3).

(a) Com f' és contínua, $f'(a) > 0 \Longrightarrow \exists\, x_0 > a$, $f(x_0) > 0$; si $\exists\, y_0 > a$, $f(y_0) < 0$, el teorema de Bolzano diu que $\exists\, z_0 > a$, $f(z_0) = 0$, i pel teorema de Rolle, com $f(a) = f(z_0) = 0 \Longrightarrow \exists\, c > a$, $f'(c) = 0$ contradicció amb (3).
(b) Si $f(b) > 0$, $b > a$ perquè (1) ens diu que si $b < a$ hauria de tenir $f(b) < 0$. Però sabem que si $b > a$ i $f'(b) < 0$, com $f'(a) > 0$, $\exists\, c > a$, $f'(c) = 0$ contradicció amb (3).
(c) No té perquè ser certa, ja que no sabem res a l'esquerra d'a.

---

2. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ verificant que $\forall\, x \in \mathbb{R}^3$ i $\forall\, t \in \mathbb{R}$ es verifica $f(tx) = tf(x)$. Sigui $x_0 \neq (0,0,0)$ i $v = \dfrac{x_0}{\|x_0\|}$. Aleshores $Dvf(x_0)$ val:

(a) $f(x_0)$. (b) $\dfrac{f(x_0)}{\|x_0\|}$. (c) $\|x_0\| f(x_0)$.

Resposta: $D_v f(x_0) = \dfrac{f(x_0)}{\|x_0\|}$

Resolució: $f(tx) = tf(x)$; $x_0 \neq (0,0,0)$; $v = \dfrac{x_0}{\|x_0\|}$

$$\begin{aligned} D_v f(x:0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f\left(x_0 + t\dfrac{x_0}{\|v_0\|}\right) - f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\left(1 + \dfrac{t}{\|x_0\|}\right) x_0\right) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\left(1 + \dfrac{t}{\|x_0\|}\right) f(x_0) - f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1 + \dfrac{t}{\|x_0\|} - 1}{t} f(x_0) = \frac{f(x_0)}{\|x_0\|} \end{aligned}$$

---

3. Doneu els valors (a, b, c) per tal que la funció $f(x, y, z) = ax^2y - be^yz + cxy^2 \sin z$ tingui en el punt $(4, 0, 2)$ la derivada direccional màxima segons la direcció $(0, 1, 0)$ i que aquesta derivada valgui 32.

Resposta: $a = 2$, $b = 0$, c qualsevol.

Resolució: $(x_0, y_0, z_0) = (4, 0, 2)$; $v = (0, 1, 0)$; $D_vf(4, 0, 2) = 32$. Si v és màxima, $v = \dfrac{\text{grad } f(4,0,2)}{\|\text{grad } f(4,0,2)\|}$; $D_vf(4, 0, 2) = \|\text{grad } f(4, 0, 2)\| = 32 \Rightarrow \text{grad } f(4, 0, 2) = 32 \cdot v$.
Calculem grad $f = (2axy + cy^2 \sin z,\ ax^2 - be^yz + cy^2 \sin z,\ be^y + cxy^2 \cos z)$;
grad $f(4, 0, 2) = (0,\ 16a - b2,\ b)$; $(0,\ 16a - b2,\ b) = 32(0, 1, 0)$; $b = 0$; $16a - 2b = 32$; $a = 2$; c qualsevol.

---

4. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x, t) = xH(g(x, t)) - e^{-rt}H(g(x, t))$, on $g(x, t) = \dfrac{\ln x + at}{\sqrt{t}}$, $a \in \mathbb{R}$ i $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2, tal que $\lim\limits_{z\to-\infty} H(z) = 0$ i $\lim\limits_{z\to+\infty} H(z) = 1$. Calculeu $\lim\limits_{t\to0^+} f(x, t)$ en funció de $x > 0$.

Resposta: $\lim\limits_{t\to0^+} f(x, t) = x - 1$, si $x > 1$; $\lim\limits_{t\to0^+} f(x, t) = 0$, si $x \leq 1$.

Resolució: $g(x, t) = \dfrac{\ln x + at}{\sqrt{t}}$, $a \in \mathbb{R}$; $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\lim\limits_{z\to-\infty} H(z) = 0$, $\lim\limits_{z\to+\infty} H(z) = 1$.
Notem que $\lim\limits_{t\to0^-} g(x, t) = \dfrac{\ln x}{+0} \begin{cases} \nearrow & x>1 \quad +\infty \\ \searrow & x<1 \quad -\infty \end{cases}$; $\lim\limits_{t\to0^-} g(1, t) = \lim\limits_{t\to0^-} a\sqrt{t} = 0$. Per tant,

$x > 1$, $\lim f(x, t) = xH(+\infty) - H(+\infty) = x - 1$
$x < 1$, $\lim f(x, t) = x0 - 0 = 0$
$x = 1$, $\lim f(1, t) = H(0) - H(0) = 0$.

---

5. Sigui $f \in C^1(-1, 1)$ tal que $f(0) = 1$ i $(1 + x)f'(x) = -f(x), \forall\, x \in (-1, 1)$. Calculeu $f^{(100)}(0)$.

Resposta: $f^{100} = 100!$.

Resolució: $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots$; $f' = a_1 + 2a_2x + \cdots$; $a_0 = f(0) = 1$;
$(1 + x)f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + xa_1 + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + \cdots$;
$-f(x) = -a_0 - a_1x \cdots$.
Igualant graus: $a_1 = -a_0$; $2a_2 + a_1 = -a_1$; $2a_2 = -2a_1$; $a_2 = -a_1$; $3a_3 + 2a_2 = -a_2$; $3a_3 = -3a_2$; $a_3 = -a_2$; $4a_4 + 3a_3 = -a_3$.
$a_0 = 1$, $a_2 = -1 \cdots a_n = (-1)^n$; $a_{100} = 1$; $f^{100} = 100!$.
