Càlcul Infinitesimal I/ Càlcul I **Codi: 21702 / 21762** **A**

Temps: 1 hora 16 d'abril de 2009

---

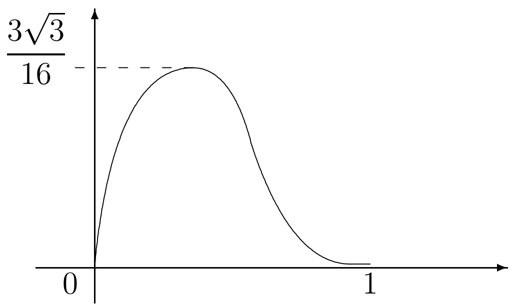
1. Considereu la funció $f(x) = x^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{3}{2}}$ definida per a $x \in [0,1]$. Trobeu tots els seus extrems i calculeu $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ i $\lim_{x\to 1^-} f'(x)$. Useu aquesta informació per fer un cròquis de la seva gràfica.

Resolució: $f'(x) = \dfrac{\sqrt{(1-x)^3}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3\sqrt{x}\sqrt{1-x}}{2}$; $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$; $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0$;

$f'(x) = 0 \iff (\sqrt{1-x})^3 = 3x\sqrt{1-x} \iff 1-x = 3x \iff x = \dfrac{1}{4}$

$f(x) \geq 0,\ \forall x \in [0,1]$; $f(x) = 0 \iff x = 0,\ 1$ mínims relatius.

$f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{4}\right)^3} = \sqrt{\dfrac{3^3}{4^4}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$ màxim relatiu.



---

2. Calculeu $\lim_{x\to+\infty} \left(\cos\left(\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^x$, essent $a \in \mathbb{R}$.

Resolució: $L = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\cos\left(\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\cos\left(\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)}{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{\ln(\cos(0))}{\dfrac{1}{+\infty}} = \dfrac{0}{0}$.

Per l'Hôpital:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)}\left(-\sin\left(\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)\cdot\left(-\dfrac{a}{2}x^{-3/2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{a}{2}\frac{\sin\left(\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)}{\cos\left(\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)}\sqrt{x} = -\frac{a^2}{2}$$

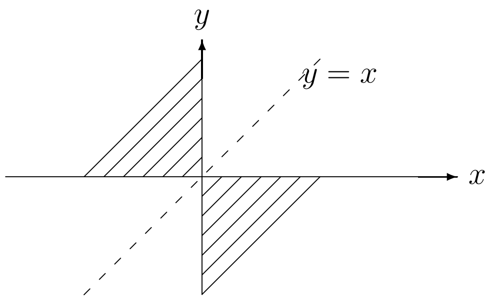
on usem $\sin\left(\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right) \simeq \dfrac{a}{\sqrt{x}}$ si $x \to +\infty$. Per tant el límit és $e^L = e^{-\frac{a^2}{2}}$

3. Definim $f(x,y)=\sqrt{|x-y|+x+y}-\sqrt{|x-y|-x-y}$. Digueu quin és el seu domini de definició i dibuixeu-lo.

Resolució: • Si $x\geq y$: $f(x,y)=\sqrt{(x-y)+x+y}-\sqrt{(x-y)-x-y}=\sqrt{2x}-\sqrt{-2y}$, ben definit si $x\geq 0$ i $y\leq 0$.

• Si $x\leq y$: $f(x,y)=\sqrt{(y-x)+x+y}-\sqrt{(y-x)-x-y}=\sqrt{2y}-\sqrt{-2x}$, ben definit si $x\leq 0$ i $y\geq 0$.

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\geq 0,\ y\leq 0\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\leq 0,\ y\geq 0\}$ domini de



4. Considereu la successió $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recurrentment per $x_0=a$ i $x_{n+1}=x_n^b$ si $n\geq 0$, essent $a>0$ i $b>0$. Calculeu $\lim_n x_n$ en funció dels valors de a i b.

Resolució: $x_0=a$, $x_1=x_0^b=a^b$, $x_2=x_1^b=a^{b^2},\ldots,x_n=a^{b^n}$.
Si $b>1\Longrightarrow \lim_n b^n=+\infty$; si $b=1\Longrightarrow b^n=1\ \ \forall n$; si $0<b<1\Longrightarrow \lim_n b^n=0$
Llavors:

- $a=1$: $\quad \lim_n x_n=\lim_n 1=1.$
- $a>1$: $\quad \lim_n x_n=\begin{cases} a^{+\infty}=+\infty & \text{si } b>1\\ a^1=a & \text{si } b=1\\ a^0=1 & \text{si } 0<b<1\end{cases}$
- $0<a<1$: $\quad \lim_n x_n=\begin{cases} a^{+\infty}=0 & \text{si } b>1\\ a^1=a & \text{si } b=1\\ a^0=1 & \text{si } 0<b<1\end{cases}$