

1. Sigui $f(x, y) = \frac{x^2y - 2y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ i $f(0, 0) = 0$. Calculeu, si existeix, $D_{xy}f(0, 0) = D_y(D_xf)(0, 0)$.

Resolució: $D_xf(x, y) = \frac{2xy(x^2 + y^2) - (x^2y - 2y^3)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{6xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$, si $(x, y) \neq (0, 0)$.

$$D_xf(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(0/x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^3} = 0$$

$$D_{xy}f(0, 0) = D_y(D_xf)(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{D_xf(0, y) - D_xf(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(0/y^4)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^5} = 0.$$

2. Sigui $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la successió definida recurrentment per $a_1 = 0$ i $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, si $n \geq 1$. Demostreu per inducció que $a_n \leq 2$ per a tot $n \geq 1$ i que a_n és estrictament creixent. Digueu si existeix $\lim_n a_n$ i quant val.

Resolució: • $a_1 = 0 < 2$. Suposem $a_n \leq 2$ per a un cert $n \geq 1$; llavors $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + 2} = 2$

• $a_2 = \sqrt{2} > 1 = a_1$. Suposem $a_n > a_{n-1}$ per a un cert $n \geq 2$; llavors $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} > \sqrt{2 + a_{n-1}} = a_n$.

Llavors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és una successió estrictament creixent i acotada superiorment i per tant $\exists L = \lim_n a_n$ verificant $L = \sqrt{2 + L} \iff L^2 - L - 2 = 0$, d'on $L \in \{-1, 2\}$. Com que $a_n \geq 0$ per a tot n tenim $L = 2$.

3. Siguin $f(x, y) = (e^x - y, \ln y)$ i $g(u, v) = (1 + u)^v$. Valculeu $D(g \circ f^{-1})(0, 0)$.

Resolució: $f^{-1}(0, 0) = (x, y) \iff f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} e^x - y = 0 \\ \ln y = 0 \end{cases} \iff y = 1, x = 0.$

Així doncs, $f(0, 1) = (0, 0)$ i $f^{-1}(0, 0) = (0, 1)$.

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} e^x & -1 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \implies Df^{-1}(0, 0) = (Df(0, 1))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$Dg(u, v) = ((1 + u)^{v-1}v \ (1 + u)^v \ln(1 + u))$, on usem $g(u, v) = e^{v \ln(1+u)}$.

$$Dg(0, 1) = (1, 0).$$

$$D(g \circ f^{-1})(0, 0) = Dg(f^{-1}(0, 0)) \cdot Df^{-1}(0, 0) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 1).$$

4. Sigui $z(x, y)$ la funció definida implícitament per l'equació $ze^z + \cos x - 1 - y^2 = 0$ i $z(0, 0) = 0$. Digueu si $z(x, y)$ té un extrem relatiu en $(0, 0)$ i si és així classifiqueu-lo.

Resolució: $f(x, y, z) = ze^z + \cos x - 1 - y^2$ verifica $f(0, 0, 0) = 0$ i $D_z f(0, 0, 0) = 1 \neq 0$. Per tant podem aïllar $z = z(x, y)$ amb $z(0, 0) = 0$. Si derivem implícitament $f(x, y, z(x, y)) = 0$ obtenim:

- $e^z(1 + z)D_x z - \sin x = 0 \implies D_x z(0, 0) = 0.$

- $e^z(1 + z)D_y z - 2y = 0 \implies D_y z(0, 0) = 0.$

Així, $z(x, y)$ té un candidat a extrem relatiu en $(0, 0)$

- $e^z(2 + z)(D_x z)^2 + e^z(1 + z)D_{xx} z - \cos x = 0 \implies D_{xx} z(0, 0) = 1.$

- $e^z(2 + z)D_x z \cdot D_y z + e^z(1 + z)D_{xy} z = 0 \implies D_{xy} z(0, 0) = 0.$

- $e^z(2 + z)(D_y z)^2 + e^z(1 + z)D_{yy} z - 2 = 0 \implies D_{yy} z(0, 0) = 2.$

Així, $H_z(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ té valors propis 1, 2 > 0 \implies mínim relatiu.