Càlcul I (E. Química) **Codi: 21762** **A**

Temps: 1 hora 15 minuts **Test** (10 punts) 19 de Juny de 2006

Nom i Cognoms:

---

1. Donada la funció $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ln(xy)\right)$. Calculeu, si es pot, $Df^{-1}(\pi/4, 0)$.

Resposta:

Resolució: $f_1(x,y) = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$D_x f_1(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{x^2+y^2}}} \, \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{|y|(x^2+y^2)}$$

$$D_y f_1(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{x^2+y^2}}} \, \frac{-x\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{-xy}{|y|(x^2+y^2)}$$

$f_2(x,y) = \ln xy$

$D_x f_2(x,y) = \dfrac{1}{x}$, $\qquad D_x f_2(x,y) = \dfrac{1}{y}$.

Com tenim $f(1,1) = \left(\arcsin \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \ln 1\right) = \left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$ i $Df(1,1) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det Df(1,1) = 1 \neq 0$.
Podem aplicar el teorema de la funció inversa:

$$Df^{-1}(\pi/4, 0) = [Df(1,1)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

---

2. Donada una funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, contínua en $[a,b]$ i derivable en $]a,b[$, amb $f(a) = f(b) = 0$, proveu que per a cada nombre real λ, existeix $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \lambda f(c)$.

(*Indicació:* Apliqueu el lema de Rolle a la funció $g(x) = e^{-\lambda x} f(x)$.)

Resposta:

Resolució: Considerem la funció $g(x) = e^{-\lambda x} f(x)$; $g(a) = g(b) = 0 \Longrightarrow$ el lema de Rolle diu que $\exists\, c \in]a,b[$, tal que $g'(c) = 0$; però $g'(x) = e^{-\lambda x} f'(x) - \lambda e^{-\lambda x} f(x)$. Per tant, $e^{-\lambda c} f'(c) - \lambda e^{-\lambda c} f(c) = 0 \Longrightarrow f'(c) = \lambda f(c)$.

---

3. Donada les funcions $f_k(x,y) = x^2 y^k \sin \dfrac{1}{x} \cos \dfrac{1}{y}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $f_k(x,0) = f_k(0,y) = 0$. Discutiu, segons els valors de k, l'existència de derivades parcials de f_k al punt $(1,0)$.

Resposta:

Resolució: $D_x f_k(1,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f_k(1+t,0) - f_k(1,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} 0 = 0$

$$D_y f_k(1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_k(1,t) - f_k(1,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^k \sin 1 \cos(1/t)}{t} = \sin 1 \lim_{t\to 0} t^{k-1} \cos(1/t)$$

si $k = 0, 1$: el límit no existeix perquè $\cos(1/t)$ oscil·la.

si $k \geq 2$: el límit és 0, ja que $\lim\limits_{t\to 0} t^{k-1} = 0$ i el $\cos(1/t)$ és fitat.

---

4. Donada una successió $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$:

(a) Escriviu la definició de que $x = \lim\limits_{p\to\infty} x_p$.

(b) Trobeu p_0 per tal que la successió $x_p = \dfrac{3p-1}{4p+5}$ verifiqui la definició de convergència amb $\varepsilon = 0.01$.

Resposta:

Resolució:

(a) $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = x \Longleftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\, p_0 = p_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $p \in \mathbb{N}$ i $p \geq p_0 \Longrightarrow |x_p - x| \leq \varepsilon$.

(b) $\lim \dfrac{3p-1}{4p+5} = \dfrac{3}{4}$; $\quad \left|x_p - \dfrac{3}{4}\right| = \left|\dfrac{3p-1}{4p+5} - \dfrac{3}{4}\right| = \left|\dfrac{-19}{4(4p+5)}\right| = \dfrac{19}{4(4p+5)} \leq 0.01$

$\dfrac{1}{4p+5} \leq \dfrac{0.04}{19} \Longrightarrow 4p+5 \geq \dfrac{19}{0.04}$; $\quad p \geq \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{19}{0.04} - 5\right) = 117'5\,,\quad p_0 = 118.$

---

5. Calculeu $D^{200} f(0)$, essent $f(x) = \dfrac{3}{3+x^2}$.

Resposta:

Resolució: $f(x) = \dfrac{3}{3+x^2} = \dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{3}} = 1 - \dfrac{x^2}{3} + \left(\dfrac{x^2}{3}\right)^2 + \cdots (-1)^n \left(\dfrac{x^2}{3}\right)^n$

$n = 100$; tenim $\dfrac{(-1)^{100}x^{200}}{3^{100}}$; per tant, $\dfrac{1}{3^{100}} = \dfrac{D^{200}f(0)}{200!}$. Aleshores: $D^{200}f(0) = \dfrac{200!}{3^{100}}$.

---

6. Calculeu el $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh 2x - \sin 2x}{x^2 - x\ln(1+x)}$. $\qquad$ (*Observació:* $\quad \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.)

Resposta:

Resolució: $\sinh 2x = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \left(2x + \dfrac{(2x)^3}{3!} + O(x^4)\right) = 2x + \dfrac{4}{3}x^3 + O(x^4)$

$\sin 2x = 2x - \dfrac{(2x)^3}{3!} + O(x^4) = 2x - \dfrac{4}{3}x^3 + O(x^4)$

$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + O(x^4)$. Per tant, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh 2x - \sin 2x}{x^2 - x\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(8/3)x^3}{(x^3/2)} = \dfrac{16}{3}$.

---

7. Enuncieu i demostreu la fórmula del gradient.

Resposta:

Resolució: $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ i $f \in C^1(D)$ i denotem grad $f = (D_1 f, \ldots, D_n f)$. Aleshores, per a tot punt $a \in D$ i $\forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{v}\| = 1$, es verifica $D_{\vec{v}} f(a) = \langle \text{grad } f(a), \vec{v}\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} D_i f(a) v_i$.

Demostració: Si considerem $g(t) = f(a + t\vec{v})$, tenim que $D_{\vec{v}} f(a) = g'(0)$; però usant la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt} f(a + t\vec{v}) = Df(a + t\vec{v}) \frac{d}{dt}(a + t\vec{v}) = \text{grad } f(a + t\vec{v}) \cdot \vec{v}$$

Aleshores, $D_{\vec{v}} f(a) = g'(0) = \text{grad } f(a) \cdot \vec{v}$.
