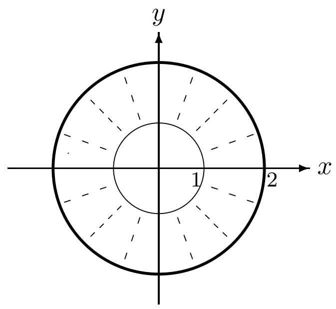
1. Sigui D el domini de definició en $\mathbb{R}^2$ de la funció $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{3} - \sqrt{4-x^2-y^2}\right)$. Determineu D, dibuixeu-lo i digueu quina és la seva frontera.

Resolució: $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 4-x^2-y^2 \geq 0 \quad \text{i} \quad \sqrt{3} - \sqrt{4-x^2-y^2} > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 < x^2+y^2 \leq 4\}$, ja que $\sqrt{3} > \sqrt{4-x^2-y^2} \Longleftrightarrow 3 > 4-x^2-y^2 \Longleftrightarrow x^2+y^2 > 1$.

Llavors $\dot{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 = 4\}$

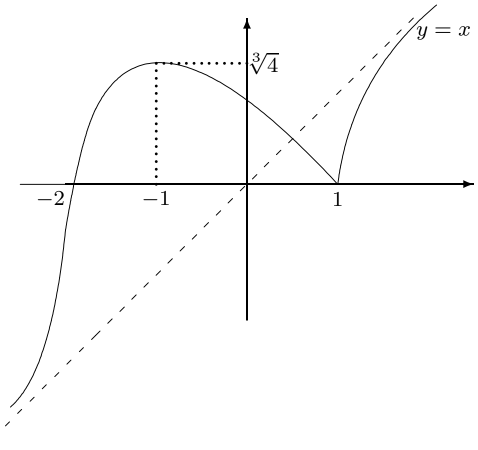


2. Sigui $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}$ definida $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Discutiu el signe de $f(x)$ en funció de x, calculeu $f'(x)$ i digueu on $f'(x) = 0$ i on la pendent de f és infinita. Finalment, sabent que $y = x$ és l'asímptota oblíqua de $f(x)$ en $\pm\infty$, feu un croquis aproximat de la seva gràfica.

Resolució:

- $f(x)$ és zero $\leftrightarrow x \in \{1, -2\}$. Fora d'aquests punts el seu signe és el mateix que el de $x+2$: $f(x) > 0$ si $x > -2$, $x \neq 1$ i $f(x) < 0$ si $x < -2$.
- $f'(x) = \dfrac{1}{3}[(x-1)^2(x+2)]^{-2/3}\{2(x-1)(x+2) + (x-1)^2\} = \dfrac{1}{3}(x-1)^{-4/3}(x+2)^{-2/3}(x-1)\{2(x+2) + x - 1\}$
$= \dfrac{1}{3}(x-1)^{-1/3}(x+2)^{-2/3}3(x+1) = \dfrac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}$.

  Clarament $\lim\limits_{x\to-2} f'(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} f'(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-} f'(x) = -\infty$ i $f'(x) = 0$, si i només si, $x = -1$



3. Donada la successió $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$, apliqueu la definició de límit i doneu $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0(\varepsilon)$, llavors $|a_n - 1| \leq \varepsilon$. Useu el valor del límit de a_n per calcular $\lim\limits_n \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$.

Resolució: $\left|\dfrac{n^2-1}{n^2+1} - 1\right| = \dfrac{2}{n^2+1} \leq \varepsilon \iff \dfrac{2}{\varepsilon} \leq n^2+1 \iff n \geq \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon} - 1}$, $n_0(\varepsilon) = E\left(\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}-1}\right) + 1$. En particular, $\lim\limits_n a_n = 1$. Llavors: $\lim\limits_n \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim\limits_n \dfrac{a_n}{n-(n-1)} = \lim\limits_n a_1 = 1$, on hem usat Stolz ja que $b_n = n$ és estrictament creixent i $\lim\limits_n b_n = +\infty$.

---

4. Considereu la successió definida recurrentment per $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{1+x_n}$, si $n \geq 1$. Demostreu per inducció que $1 \leq x_n \leq 2$ i que x_n és estrictament creixent. Té límit x_n? Quant val?

Resolució:

- És clar que $1 \leq x_1 \leq 2$. Llavors, si suposem que per a un cert $n \geq 1$, tenim $1 \leq x_n \leq 2$, llavors $x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{1+x_n}$ compleix $1 \leq x_{n+1} \leq 2$ ja que $0 < \dfrac{x_n}{1+x_n} < 1$, en ésser $0 < x_n$.
- Si calculem $x_2 = 1 + \dfrac{x_1}{1+x_1} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ llavors $x_2 > x_1$. Si suposem que per a un cert $n \geq 2$ tenim $x_n > x_{n-1}$, llavors volem veure que $x_{n+1} > x_n$. En efecte: $x_{n+1} > x_n \iff 1 + \dfrac{x_n}{1+x_n} > 1 + \dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} \iff x_n(1+x_{n-1}) > x_{n-1}(1+x_n) \iff x_n > x_{n-1}$ com volíem veure.
- Llavors com que x_n és estrictament creixent i acotada $\exists\, L = \lim\limits_n x_n$ verificant $L = 1 + \dfrac{L}{1+L} \iff L + L^2 = 1 + L + L \iff L^2 - L - 1 = 0$, d'on $L = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Com que és clar que $L > 0$, llavors ha de ser $L = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.