**Càlcul Infinitesimal/Càlcul I** **Codi: 21702/21762** **A**

Temps: 1 hora **Test** (10 punts) 20 de Juny de 2005

---

**Nom i Cognoms:**

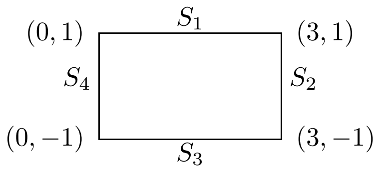
---

**1.** Trobeu els extrems absoluts de la funció $f(x,y) = \sqrt{4-x} + xy^2$ en el rectangle de vèrtexs $(0,1),(3,1),(3,-1),(0,-1)$.

**Resposta:** $(3,0)$ mímim absolut; $(3,1),(3,-1)$ màxims absoluts.

**Resolució:** La funció és $C^\infty$ per $x<4$, que inclou el rectangle considerat.

(a) Candidats a extrems a l'interior del rectangle: $\left.\begin{array}{l} D_x f = -\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}} + y^2 = 0 \\ D_y f = 2xy = 0 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ obtenim els punts $(0,1/2),(0,-1/2)$, però són a la frontera




(b) Candidats a la frontera:
$S_1 : g_1(x) = f(x,1) = \sqrt{4-x} + x$, $0 \le x \le 3$; $g_1'(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{15}{4}$ però cau fora, únics candidats: $(0,1)$, $(3,1)$.
$S_2 : g_2(y) = f(3,y) = 1 + 3y^2$, $-1 \le y \le 1$; $g_2'(y) = 0 \Rightarrow y = 0$; candidats: $(3,0)$, $(3,1)$, $(3,-1)$.
$S_3 : g_3(x) = f(x,-1) = g_1(x)$; igual que $S_1$; candidats: $(0,-1)$, $(3,-1)$.
$S_4 : g_4(y) = f(0,y) = 2$, $\forall\, y$; candidats: tots el $(0,y)$, $-1 \le y \le 1$.
Avaluem $f$ a tots els candidats: $f(3,0) = 1$ mínim absolut; $f(0,y) = 2$; $f(3,1) = f(3,-1) = 4$ màxims absoluts.

---

**2.** Essent $f(x,y,z) = x^2 + \sin yz$ i $g(s) = (s^3, e^{2s}, \pi)$, calculeu $D(f\circ g)(0)$.

**Resposta:** $-2\pi$.

**Resolució:** Per la regla de la cadena,

$$D(f\circ g)(0) = Df(g(0))Dg(0) = (2x \quad z\cos yz \quad y\cos yz)_{|(0,1,\pi)} \cdot \left.\begin{pmatrix} 3s^2 \\ 2e^{2s} \\ 0 \end{pmatrix}\right|_{s\,=\,0} = (0 \quad -\pi \quad -1)\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\pi\,.$$

---

**3.** Calculeu $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 + 4\sin^2 x - e^{4x^2}}{4x^2\cos^2 x - \sin^2 2x}$.

**Resposta:** 1.

**Resolució:** $4\sin^2 x = 4\left(x - \dfrac{x^3}{6} + O_5\right)^2 = 4\left(x^2 - \dfrac{x^4}{3} + O_6\right) = 4x^2 - \dfrac{4}{3}x^4 + O_6$.

$\sin^2 2x = (2x)^2 - \dfrac{(2x)^4}{3} + O_6 = 4x^2 - \dfrac{16}{3}x^4 + O_6$

$e^{4x^2} = 1 + 4x^2 + \dfrac{(4x^2)^2}{2} + \cdots = 1 + 4x^2 + 8x^4 + O_6$

$4x^2\cos^2 x = 4x^2\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + O_4\right)^2 = 4x^2(1 - x^2 + O_4) = 4x^2 - 4x^4 + O_6$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + 4\sin^2 x - e^{4x^2}}{4x^2\cos^2 x - \sin^2 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(-28/3)x^4 + O_6}{(-28/3)x^4 + O_6} = \lim_{x\to 0} \frac{(-28/3) + O_2}{(-28/3) + O_2} = 1.$$

---

**4.** Considereu $f(x,y)$ una funció de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ i $(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$ un punt qualsevol. Sigui $A=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)$ i suposeu que la derivada direccional de la funció $f$ en el punt $(a_1,a_2)$ segons el vector $v=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ val $-A$. Digueu quin és el valor de $A$ pel qual la derivada direccional màxima de $f$ en el punt $(a_1,a_2)$ és igual a $\sqrt{3}$.

**Resposta:** $A=\pm\dfrac{3}{2}$.

**Resolució:** Com que $f$ és $\mathcal{C}^1$, podem aplicar la fórmula del gradient: $D_vf(a_1,a_2)=\langle\nabla f(a_1,a_2),v\rangle = A\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-A\Rightarrow\dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)=-\dfrac{A}{\sqrt{3}}$. La derivada direccional màxima en $(a_1,a_2)$ és:
$\|\nabla f(a_1,a_2)\|=\sqrt{A^2+\left(-\dfrac{A}{\sqrt{3}}\right)^2}=|A|\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\Rightarrow A=\pm\dfrac{3}{2}$.

---

**5.** Digueu quantes solucions té l'equació $x^9+e^{10x}=8^{-x}+24$.

**Resposta:** Té una única solució.

**Resolució:** $f(x)=x^9+e^{10x}$ és estrictament creixent, $\lim\limits_{-\infty} f=-\infty$, $\lim\limits_{\infty} f=\infty$.
$g(x)=8^{-x}+24$ és estrictament decreixent, $\lim\limits_{-\infty} g=\infty$, $\lim\limits_{\infty} g=24$.
L'equació és $h(x)=0$, on $h(x)=f(x)-g(x)$ és estrictament creixent, $\lim\limits_{-\infty} h=-\infty$, $\lim\limits_{\infty} h=\infty$. Deduïm que té 1 única solució.

---

**6.** Donada la funció $f(x)=(2a)^{\sin x}$, $a>0$, doneu els valors de $a$ per als quals $f'''(0)=0$.

**Resposta:** $a=\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2e},\dfrac{e}{2}$.

**Resolució:** Desenvolupem per Taylor a l'origen fins a grau 3:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\sin x(\ln 2a)} = 1+\ln 2a\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{(\ln 2a)^2}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2+\frac{(\ln 2a)^3}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3+O_4= \\ &= 1+(\ln 2a)x-\frac{\ln 2a}{6}x^3+\frac{(\ln 2a)^2}{2}x^2+\frac{(\ln 2a)^3}{6}x^3+O_4= \\ &= 1+(\ln 2a)x+\frac{(\ln 2a)^2}{2}x^2+\left(-\frac{1}{6}\ln 2a+\frac{(\ln 2a)^3}{6}\right)x^3+O_4. \end{aligned}$$

Per tant, $-\dfrac{1}{6}\ln 2a+\dfrac{1}{6}(\ln 2a)^3=f'''(0)/3!\Rightarrow f'''(0)=-\ln 2a+(\ln 2a)^3=0$; per tant: $\ln 2a=0\Rightarrow a=1/2$ o bé, $\ln 2a=-1\Rightarrow a=\dfrac{1}{2e}$ o bé, $\ln 2a=1\Rightarrow a=e/2$.