Càlcul Infinitesimal I / Càlcul I **Codi: 21702 / 21762** **A**

Temps: 50 minuts 21 de gener de 2009

Test (8 punts)

1. Siguin $f(x,y) = (x+y^2,\, y+\cos x)$ i $g(x,y) = (x-y^2,\, y-\cos x)$. Verifiqueu que existeix f^{-1} inversa local de f tal que $f^{-1}(1,2) = (0,1)$ i calculeu la matriu de derivades parcials $D(g\circ f^{-1})(1,2)$.

Resolució: $Df = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ -\sin x & 1 \end{pmatrix}$, $\quad Dg = \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ \sin x & 1 \end{pmatrix}$.

És clar que f és localment invertible entorn de $(0,1)$ ja que $\det Df(0,1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ i a més, $f(0,1) = (1,2)$.

$$\begin{aligned} D(g\circ f^{-1})(1,2) &= Dg(f^{-1}(1,2))\cdot Df^{-1}(1,2) = Dg(0,1)\cdot (Df(0,1))^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

---

2. Sigui $f(x) = x^n \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$ i $f(0) = 0$. Per a quins valors de $n \in \mathbb{N}$ és $f'(x)$ una funció contínua en $x = 0$?

Resolució: $f'(x) = n\cdot x^{n-1}\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - 2x^{n-3}\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x^{n-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \nexists & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \text{ (límit d'una funció acotada per funció que tendeix a zero)} \end{cases}$$

Per tal que f' sigui contínua en $x = 0$ volem que $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$. Per això cal que $n \geq 4$ per tal que $\lim_{x\to 0} x^{n-3} = 0$.

---

3. Considereu la successió x_n definida recurrentment per $x_1 = \sqrt{2}$ i $x_{n+1} = (2x_n)^{\frac{1}{n+2}}$, si $n \geq 1$. Verifiqueu per inducció que $x_n = 2^{\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+1)!}}$ i calculeu el $\lim_n x_n$.

Resolució: • Cas $n = 1$: $x_1 = 2^{1!/2!} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$.

• Suposem que la fórmula certa per a un cert $n \geq 1$. Llavors:

$$x_{n+1} = (2x_n)^{\frac{1}{n+2}} = 2^{\frac{1}{n+2}} \cdot 2^{\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+2)!}} = 2^{\frac{(n+1)!}{(n+2)!}} \cdot 2^{\frac{1+\cdots+n!}{(n+2)!}} = 2^{\frac{1!+\cdots+(n+1)!}{(n+2)!}}$$

i per tant també és certa per a $n+1$.

• $$\lim_n \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+1)!} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stolz}}}{=} \lim_n \frac{n!}{(n+1)!-n!} = \lim_n \frac{1}{(n+1)-1} = \lim_n \frac{1}{n} = 0.$$

Així, $\lim_n x_n = 2^0 = 1$.

---

4. Sigui $f(x,y) = e^{xy}\cos(y)$. Calculeu el seu desenvolupament de Taylor entorn del $(0,0)$ fins a termes de grau 4 inclosos i digueu quant val la derivada $D_{xxyy}f(0,0)$.

Resolució: $f(x,y) = \left(1 + \frac{xy}{1!} + \frac{(xy)^2}{2!} + R_6(x,y)\right) \cdot \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + R_6(y)\right) =$

$$= 1 + xy - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{xy^3}{2} + \frac{y^4}{24} + R_6(x,y)$$

$$\frac{1}{2} = \text{coef}(x^2y^2) = \frac{1}{4!}\binom{4}{2} D_{xxyy}f(0,0) \implies D_{xxyy}f(0,0) = \frac{4!}{2\binom{4}{2}} = \frac{4!}{2 \cdot \frac{4!}{2!2!}} = 2\,.$$