

1. El conjunt $\{x \in \mathbb{R}, 3 - |2x - |x - 1|| \geq 0\}$, és:

- (a) $\left[-\frac{2}{3}, 2\right]$. ■ (b) $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$. (c) $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$. (d) $\left[\frac{1}{3}, 2\right]$. (e) $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$.

Resolució: $3 - |2x - |x - 1|| = \begin{cases} 3 - |2x - (x - 1)|, & \text{si } x \geq 1 \\ 3 - |2x + (x - 1)|, & \text{si } x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} 3 - |x + 1|, & \text{si } x \geq 1 \\ 3 - |3x - 1|, & \text{si } x \leq 1 \end{cases} =$

$$= \begin{cases} 3 - (x + 1), & \text{si } x \geq 1 \\ 3 - (3x - 1), & \text{si } 1/3 \leq x \leq 1 \\ 3 + (3x - 1), & \text{si } x \leq 1/3 \end{cases} = \begin{cases} 2 - x, & \text{si } x \geq 1 \\ 4 - 3x, & \text{si } 1/3 \leq x \leq 1 \\ 2 + 3x, & \text{si } x \leq 1/3 \end{cases}; \begin{cases} 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \\ 4 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4/3 \\ 2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2/3 \end{cases}.$$

Així, $3 - |2x - |x - 1|| \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, & x \leq 2 \\ 1/3x \leq x \leq 1, & x \leq 4/3 \\ x \leq 1/3, & x \geq -2/3 \end{cases} = [-2/3, 2]$.

2. Si una funció $f(x)$ té com a asymptota a $+\infty$ la recta $y = ax + b$, llavors la de la funció $g(x) = \frac{f(x^2)}{x^2}$, és:

- (a) $y = ax + b$. (b) $y = ax$. (c) $y = a$. ■ (d) $y = |a|x + |b|$. (e) Cap de les anteriors.

Resolució: $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$; busquem l'asíptota $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x^2)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x^2)}{x^2} = 0 \cdot a = 0; n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x^2)}{x^2} = a.$$

3. Si $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ i $g(x) = \frac{x-3}{x+5}$, digueu quina fórmula explícita és la verdadera:

- (a) $g^{-1} = -\frac{5x-5}{x-1}$. (b) $(g^{-1} \circ f)(x) = -4x - 1$. ■ (c) $(f^{-1} \circ g)(x) = -4x - 4$.
 (d) $f^{-1} = \frac{2x+1}{x-1}$. (e) Cap de les anteriors.

Resolució: $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x+1 = y(x-1) \Leftrightarrow (1-y)x = -y-1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1} = f^{-1}(y)$;

$g(x) = y \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+5} = y \Leftrightarrow x-3 = y(x+5) \Leftrightarrow (1-y)x = 5y+3 \Leftrightarrow x = \frac{5y+3}{1-y} = g^{-1}(y)$;

$$(g^{-1} \circ f)(x) = g^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{5\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + 3}{1 - \left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{5(x+1) + 3(x-1)}{x-1 - (x+1)} = \frac{8x+2}{-2} = -4x - 1;$$

$$(f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}\left(\frac{x-3}{x+5}\right) = \frac{\frac{x-3}{x+5} + 1}{\frac{x-3}{x+5} - 1} = \frac{x-3 + x+5}{(x-3) - (x+5)} = \frac{2x+2}{-8} = -\frac{x}{4} - \frac{1}{4}.$$

4. Sigui la funció $f(x)$ definida per $f(x) = \frac{E(x)}{|x-1|}$. Podem afirmar aleshores, que:

- (a) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{E(x)}{|x-1|} = -1$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{E(x)}{|x-1|} = -\frac{1}{2}$. ■ (b) $f(x)$ no està definida en $x = -1$.
 (c) $f(x)$ pren sempre valors positius. (d) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.
 (e) Cap de les anteriors.

Resolució: $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{E(x)}{|x-1|} = \frac{1}{|-1-1|} \lim_{x \rightarrow -1^-} E(x) = \frac{1}{2}(-2) = -1$;

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{E(x)}{|x-1|} = \frac{1}{|-1-1|} \lim_{x \rightarrow -1^+} E(x) = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$; $f(-1) = \frac{E(-1)}{|-1-1|} = -\frac{1}{2}$; $f(x)$ pren valors positius i negatius

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{E(x)}{|x-1|} &= \frac{1}{|0-1|} \lim_{x \rightarrow 0^+} E(x) = \frac{1}{1} \cdot 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{E(x)}{|x-1|} &= \frac{1}{|0-1|} \lim_{x \rightarrow 0^-} E(x) = \frac{1}{1} \cdot (-1) = -1 \end{aligned} \right\} \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

5. La funció $f(x) = \arcsin \frac{1}{1+2x^2}$ verifica:

- (a) f és constant en el seu domini.
- (b) f' és una funció parella i $\lim_{x \rightarrow 0^-} (f'(x) - E(x)) = 0$.
- (c) f té $y = 0$ com asymptota a $-\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 2$. ■
- (d) f no és contínua en $x = 0$.
- (e) Cap de les anteriors.

Resolució: $f'(x) = \frac{-2x}{|x|(1+2x^2)\sqrt{x^2+1}}$, per tant f no és constant i f' no és parella; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, per tant $y = 0$ és una asymptota horitzontal a $-\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{x(1+2x^2)\sqrt{x^2+1}} = 2$; $f(0) = \arcsin 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin \frac{1}{1+2x^2}$, per tant f és contínua en $x = 0$.

6. La successió $x_p = 2^{2^{p+1}-p-1}$, $p \geq 0$ verifica:

- (a) $x_0 = 2$, $x_{p+1} = 2^p x_p^2$, $p \geq 0$. ■
- (b) $x_0 = 4$, $x_{p+1} = 2^p x_p^2$, $p \geq 0$.
- (c) $x_0 = 2$, $x_{p+1} = 2^p x_p$, $p \geq 0$.
- (d) $x_0 = 2$, $x_{p+1} = 2^{p+1} x_p^2$, $p \geq 0$.
- (e) Cap dels anteriors.

Resolució: $x_0 = 2^{2^{0+1}-0-1} = 2^{2-1} = 2$; $x_{p+1} = e^{2^{(p+1)+1}-(p+1)-1} = 2^{2^{p+2}-p-2} = 2^p (2^{2^p-p-1})^2 = 2^p x_p^2$, $p \geq 0$.

7. Sigui $a_p = \frac{1}{2} \{1 - (-1)^p\}$. Llavors el límit de la successió $A_p = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_p}{p}$,

- (a) val $1/2$. ■
- (b) no existeix.
- (c) val 0 .
- (d) val $+\infty$.
- (e) Cap dels anteriors.

Resolució: $a_p = \frac{1}{2} (1 - (-1)^p) = \begin{cases} 1/2(1-1) = 0 & \text{si } p \text{ és parell} \\ 1/2(1-(-1)) = 1 & \text{si } p \text{ és senar} \end{cases}$

p parell, $p = 2n$: $a_1 + a_2 + \dots + a_p = 0 + 1 + 0 + \dots + 1 = n$

p senar, $p = 2n - 1$: $a_1 + a_2 + \dots + a_p = 0 + 1 + \dots + 0 = n - 1$

$$A_p = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_p}{p} = \begin{cases} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, & \text{si } p = 2n \text{ és parell} \\ \frac{n-1}{2n-1}, & \text{si } p = 2n-1 \text{ és senar} \end{cases} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

8. El límit de la successió $\frac{1^2 + \dots + p^2}{p^3 + \ln(p!)}$, és:

- (a) 0 .
- (b) $2/3$.
- (c) $1/3$. ■
- (d) ∞ .
- (e) Cap dels anteriors.

Resolució: $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1^2 + \dots + p^2}{p^3 + \ln(p!)} \stackrel{\text{Stolz}}{=} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{(p+1)^2}{(p+1)^3 + \ln(p+1!) - p^3 - \ln(p!)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p^2 + 2p + 1}{3p^2 + 3p + 1 + \ln \left[\frac{(p+1)!}{p!} \right]} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p^2 + 2p + 1}{3p^2 + 3p + 1 + \ln(p+1)} = \frac{1}{3}$.

9. El límit de la successió $\left(\sqrt{\frac{1+3p}{5+3p}} \right)^{\frac{p^2}{2p-1}}$, és:

- (a) $1/5$.
- (b) \sqrt{e} .
- (c) $1/\sqrt[3]{e}$. ■
- (d) 0 .
- (e) Cap dels anteriors.

Resolució: $\left(\sqrt{\frac{1+3p}{5+3p}} \right)^{\frac{p^2}{2p-1}} = \left[\left(1 + \frac{-4}{5+3p} \right)^{5+3p} \right]^{\frac{p^2}{2(5+3p)(2p-1)}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} (e^{-4})^{(1/12)} = \frac{1}{e^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

10. Donada $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, sabem que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ i $\exists x \in D$, tals que $|x - a| < \delta$ i $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$; aleshores podem assegurar que:

- (a) f és contínua en a .
- (b) El límit de f en a no existeix.
- (c) El punt a no té imatge.
- (d) f no és contínua en a .
- (e) No podem assegurar res sobre la continuïtat de f en a . ■

Resolució: La continuïtat estaria assegurada si per a tot x tal que $|x - a| < \delta$, aleshores $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.