

1. El límit $\lim \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{n-1}{n}$ val:

- (a) 1. (b) 0. ■ (c) ∞ . (d) No existeix. (e) Cap de les anteriors.

Resolució: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

2. Sigui A el conjunt de punts de \mathbb{R} que no pertanyen al domini de la funció $f(x) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$.

Quina de les afirmacions següents és correcta?

- (a) A és obert, però no és acotat. (b) A és compacte. ■ (c) A és acotat i és obert.
 (d) A no és acotat. (e) Cap de les anteriors.

Resolució: $x \in A \iff x = 0$ o $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \iff x = 0$ o $\frac{1}{x} = n\pi, n \in \mathbb{Z} \iff x = 0$ o $x = \frac{1}{n\pi}, n \in \mathbb{Z}$.
 $A = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n\pi} : n \in \mathbb{Z} \right\}$; A tancat i acotat $\implies A$ compacte.

3. Del conjunt $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} \geq 0 \right\}$ podem afirmar que:

- (a) -1 és l'ínfim, però no el mínim. ■ (b) -1 és l'ínfim i el mínim.
 (c) 2 és el suprem i el màxim. (d) 2 és el suprem, però no el màxim.
 (e) Cap de les anteriors.

Resolució: $\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} \geq 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \text{ si } x > -1 \\ x^2 - 3x + 2 \leq 0 \text{ si } x < -1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (-1, 1] \cup [2, +\infty) \\ \emptyset \end{array} \right.$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = 1, 2.$$

4. El límit $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-x}{2+x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$ val:

- (a) -1 . (b) e . (c) e^{-1} . ■ (d) 0 . (e) Cap de les anteriors.

Resolució: $\left(\frac{2-x}{2+x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} = \left(1 + \frac{-2x}{2+x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} = \left[\left(1 - \frac{1}{(1/x) + (1/2)} \right)^{(1/x) + (1/2)} \right]^{\frac{1}{((1/x) + (1/2)) \sin x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{(1/x) + (1/2)} \right)^{(1/x) + (1/2)} = e^{-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{1}{(1/x) + (1/2)} \right)^{(1/x) + (1/2)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\left(1 + \frac{1}{-(1/x) - (1/2)} \right)^{-(1/x) - (1/2)} \right]^{-1} = e^{-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{((1/x) + (1/2)) \sin x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-x}{2+x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{-1}.$$

5. Per a quins valors de $a \in \mathbb{R}$ és convergent la successió $x_n = \left| a + \frac{1}{n} \right|^{a-n}$?

- (a) Per a tot $a \in \mathbb{R}$. (b) Per a $|a| \leq 1$. (c) Per a $a > 0$.
 (d) Per a $a \in]-\infty, -1[\cup]0, 1]$. ■ (e) Cap de les anteriors.

Resolució: Si $a > 1$: $\lim |a|^{+\infty} = +\infty$.

Si $a = 1$: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$.

Si $0 < a < 1$: $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a^{+\infty} = 0$.

Si $-1 < a < 0$: $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (|a|)^{-\infty} = +\infty$. No convergeix.

Si $a < -1$: $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a|^{-\infty} = 0$.

6. Donades les funcions $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Aleshores es verifica que:

(a) $f \circ g^{-1}(x) = \frac{1-x}{2}$ i $D_{f \circ g^{-1}} = \mathbb{R}$. (b) $f \circ g^{-1}(x) = \frac{1+x}{1-x}$ i $D_{f \circ g^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(c) $f \circ g^{-1}(x) = \frac{1-x}{2}$ i $D_{f \circ g^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. ■ (d) $f \circ g^{-1}(x) = \frac{1+x}{1-x}$ i $D_{f \circ g^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(e) Cap dels anteriors.

Resolució: $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $g^{-1}(x) = \frac{-1-x}{x-1}$

$$\left[y = g(x) = \frac{x-1}{x+1} \iff y(x+1) = x-1 \iff (y-1)x = -1-y \iff x = \frac{-1-y}{y-1} = g^{-1}(y) \right]$$

$$f \circ g^{-1}(x) = \frac{1}{1 + \frac{-1-x}{x-1}} = \frac{1}{\frac{x-1-1-x}{x-1}} = \frac{1}{\frac{-2-x}{x-1}} = \frac{x-1}{-2-x} = \frac{1-x}{2}$$

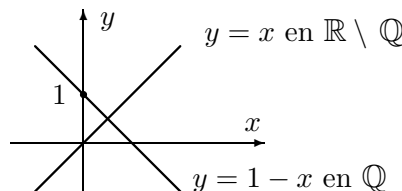
$$D_{f \circ g^{-1}} = \left\{ x \in D_{g^{-1}} \mid g^{-1}(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \neq 1 \mid \frac{-1-x}{x-1} \neq -1 \right\} = \\ = \{x \neq 1 \mid -1-x \neq -x+1\} = \{x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

7. Sigui la funció definida per $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Aleshores, podem afirmar que:

- (a) f és contínua en \mathbb{R} . (b) f no és contínua en cap punt de \mathbb{R} .
 (c) f és contínua en $x = 0$ i $x = 1$. (d) f és contínua en $x = 1/2$. ■
 (e) Cap dels anteriors.

Resolució: f contínua en $x \iff x = 1-x \iff x = 1/2$



8. Essent la funció $\begin{cases} f(x) = |x|^x & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = a \end{cases}$ es verifica:

- (a) És contínua $\forall a \in \mathbb{R}$. (b) És contínua si $a = 1$. ■
 (c) És contínua si $a = 0$. (d) No és contínua en el zero perquè $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ no existeix.
 (e) Cap dels anteriors.

Resolució: $f(x) = e^{x \ln |x|}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \implies$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^0 = 1.$$