

## Test (9 punts)

1. Sigui  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1$  tal que  $f(1) = 0$ ;  $Df(1) = 5$ ,  $Df(-1) = 10$ ; aleshores calculeu  $D(f \circ (f^{-1} - 2))(0)$

**Resposta:** 2.

**Resolució:**  $f(1) = 0$ ;  $f^{-1}(0) = 1$

$$D(f \circ (f^{-1} - 2))(0) = Df(f^{-1}(0) - 2)D(f^{-1} - 2)(0) = Df(-1)Df^{-1}(0) = Df(-1)\frac{1}{Df(1)} = \frac{10}{5} = 2.$$

2. Donats  $a_1 \dots a_n$ , nombres reals i la funció  $f(x) = \sum_{k=1}^n (x - a_k)^2$  trobeu els extrems relatius de  $f$  i digueu com són.

**Resposta:**  $x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$  és un mínim relatiu.

**Resolució:**  $f$  és un polinomi de segon grau.

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n 2(x - a_k) = 0 \implies nx - \sum_{k=1}^n a_k = 0; \quad x = \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \text{ és un possible extrem relatiu.}$$

$$f''(x) = \sum_{k=1}^n 2 = 2n > 0 \text{ és un mínim.}$$

3. Digueu per a quins valors de  $q \in \mathbb{R}$  la funció  $f(x, y) = x^3y^2 + x^2 + qy^2$  té un extrem relatiu en  $(0, 0)$ .

**Resposta:**  $(0, 0)$  és extrem relatiu  $\iff q \geq 0$ .

**Resolució:**  $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + 2x \implies \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + 2qy \implies \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 6xy^2 + 2 & 6x^2y \\ 6x^2y & 2x^3 + 2q \end{pmatrix} (0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2q \end{pmatrix}; \quad \det = 4q, \quad \tau = 2(1 + q); \quad 4q > 0 \text{ és extrem } q > 0.$$

$$\tau = 2(1 + q).$$

Si  $q > 0$ ,  $\tau > 0 \implies (0, 0)$  és mínim relatiu.

Si  $q < 0$ , no és extrem.

Si  $q = 0$ , el criteri no decideix però  $f(x, y) = x^3y^2 + x^2 = x^2(xy^2 + 1)$  si  $x, y$  petits  $f \geq 0 \implies (0, 0)$  mínim relatiu;  $f(0, 0) = 0$ .

4. Sigui  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida per  $f(x, y) = (e^{x-y}, y) = (u, v)$  i  $f^{-1}(u, v) = h(u, v) = (h_1(u, v), h_2(u, v))$  la seva inversa (on estigui definida). Calculeu  $\alpha = D_u h_1(1, 1) + D_v h_2(1, 1)$ .

**Resposta:**  $\alpha = 2$ .

**Resolució:**  $Dh(1, 1) = Df^{-1}(1, 1) = [Df(f^{-1}(1, 1))]^{-1}$ ; com  $\left. \begin{matrix} e^{x-y} = 1 \\ y = 1 \end{matrix} \right\}$  té solució  $y = 1, e^{x-1} = 1 \implies x - 1 = 0 \implies f(1, 1) = (1, 1) \implies f^{-1}(1, 1) = (1, 1)$ .

$$\text{Per tant } Dh(1, 1) = (Df(1, 1))^{-1} = \left[ \begin{pmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (1, 1) \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies$$

$$\alpha = D_u h_1(1, 1) + D_v h_2(1, 1) = 1 + 1 = 2.$$

5. Sigui  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $G(x, y, z) = (xyz, x + y + az, x^2 - y^3)$  i  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(u, v, w) \rightarrow F(u, v, w)$ ,  $C^1(\mathbb{R}^3)$ , de la qual sabem que  $F(0, 0, 0) = 0$  i  $D_v F(0, 0, 0) \neq 0$ . Considerem la funció  $H(x, y, z) = F \circ G(x, y, z)$ ; aleshores, per a quins valors de  $a$  l'equació  $H(x, y, z) = 0$  defineix a  $x = h(y, z)$  en un entorn de  $(0, 0, 0)$ .

**Resposta:** Per a qualsevol valor de  $a$ .

**Resolució:** (1)  $H$  és  $C^1$ .

(2)  $H(0, 0, 0) = F(G(0, 0, 0)) = F(0, 0, 0) = 0$ .

(3)  $DH(0, 0, 0) = DF(G(0, 0, 0))DG(0, 0, 0) = (D_u F(0, 0, 0) \quad D_v F(0, 0, 0) \quad D_w F(0, 0, 0)) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$D_x H(0, 0, 0) = D_v F(0, 0, 0) \cdot 1 \neq 0$  per tant  $\forall a$ ,  $H(x, y, z) = 0$  defineix implícitament  $x = h(y, z)$  en un entorn de  $(0, 0, 0)$ .

6. Sigui  $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - xy^2)$ . Calculeu  $\frac{\partial^6 f}{\partial x^2 \partial y^4}(0, 0)$ .

**Resposta:**  $-24$ .

**Resolució:** Taylor:  $\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{6} + \mathcal{O}(z^7)$

$\ln(1 - x^2 - xy^2) = -x^2 - xy^2 - \frac{(-x^2 - xy^2)^2}{2} + \frac{(-x^2 - xy^2)^3}{3} + \mathcal{O}_7 = -x^2 - xy^2 - \frac{x^4 + x^2 y^4 + 2x^3 y^2}{2} + \frac{-x^6}{3} + \mathcal{O}_7$

$x^2 y^4$  té coeficients  $-\frac{1}{2} = \frac{1}{6!} \binom{6}{2} \frac{\partial^6 f}{\partial x^2 \partial y^4}(0, 0) \Rightarrow \frac{\partial^6 f}{\partial x^2 \partial y^4}(0, 0) = -\frac{6!}{2} \frac{1}{\binom{6}{2}} = -\frac{6!}{2 \cdot 6!} = -\frac{6!2!4!}{2 \cdot 6!} = -24$ .

7. Sigui  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida per  $f(x, y) = \frac{xy^4}{2x^4 + y^6}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ ;  $f(0, 0) = 0$ . Digueu en quines direccions existeix la derivada direccional de  $f$  en el punt  $(0, 0)$  i digueu quant val.

**Resposta:** Sempre existeixen i valen  $\frac{v_2^4}{2v_1^3}$  si  $v_1 \neq 0$ ; i  $0$  si  $v_1 = 0$ .

**Resolució:**  $D_v f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tv_1 t^4 v_2^4}{2t^4 v_1^4 + t^6 v_2^6} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^5 v_1 v_2^4}{t^5 (2v_1^4 + t^2 v_2^6)} = \frac{v_1 v_2^4}{2v_1^4} = \frac{v_2^4}{2v_1^3}$  si  $v_1 \neq 0$ . Si  $v_1 = 0$ ,  $D_{(0,1)} f = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0$ .

8. En quins punts és contínua la funció

$$f(x, y) = \begin{cases} y \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) & x, y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 0 \end{cases}$$

**Resposta:** És contínua en  $\mathbb{R}^2 - \{(x, y), x = 0, y \neq 0\}$ .

**Resolució:** Si  $x, y \neq 0$ , la funció és contínua per generació

•  $(a, 0)$ ;  $f(a, 0) = 0$ ;  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} f(x, y) = \lim_{(a,0) \downarrow} \underbrace{y \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)}_{\text{acotada}} = 0$ ; aleshores contínua en  $(a, 0)$ .

•  $(0, b)$ ;  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,b)} f(x, y) = \lim_{(0,b) \downarrow} \underbrace{y \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)}_{\text{oscil.la}} = b \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,b)} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ . No existeix, si  $b \neq 0$ .

9. Sigui  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Almenys una afirmació és falsa. Digueu quina i perquè.

- (a)  $f$  és derivable infinites vegades.
- (b)  $f$  sempre és contínua en  $x = 0$ .
- (c)  $f$  sempre té un mínim absolut en  $x = 0$

**Resposta:** a i b certes; c, falsa.

**Resolució:** Com és un pòlino i és  $C^\infty$  i per tant contínua, per tant  $a$  i  $b$  són certes. Si  $n$  és parell  $f(x) \geq 0$  i  $f(0) = 0$ ; aleshores  $0$  és mínim absolut, però si  $n$  és senar  $f$  no té cap mínim en  $x = 0$  perquè  $f(x) > 0$ ;  $x > 0$ ;  $f(x) < 0$ ,  $x < 0$ .