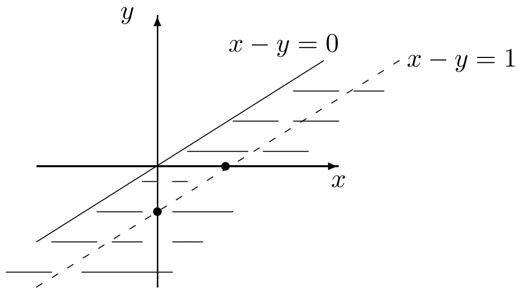
Càlcul Infinitesimal/Càlcul I **Codi: 21702/21762** **A**

Temps: 1 hora **Test** 29 d'Octubre de 2008

---

1. Considereu la funció $f(x,y) = \dfrac{1}{1-\sqrt{x-y}}$ i sigui D el seu domini de definició en $\mathbb{R}^2$. Determineu D, dibuixeu-lo i digueu quina és la frontera de D.

Resolució: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x-y>0, \ \sqrt{x-y} \neq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x-y>0, \ x-y \neq 1\}$.



La frontera és doncs $\dot{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x-y=0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x-y=1\}$.

---

2. Considereu la funció $f(x) = (\sqrt{x})^x$ definida per a $x>0$. Calculeu $f'(x)$ i determineu el seu únic extrem relatiu. Digueu si és màxim o mínim relatiu.

Resolució: $f(x) = \left(\sqrt{e^{\ln x}}\right)^x = e^{(x/2)\ln x}$, $f'(x) = e^{(x/2)\ln x}\left(\dfrac{\ln x}{2} + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{f(x)}{2}(\ln x + 1) = 0 \Longleftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Longleftrightarrow$ $\ln x = -1 \Longleftrightarrow x = e^{-1}$, ja que $f(x) > 0$ si $x > 0$.
Clarament signe $(f'(x)) = $ signe $(\ln x + 1) = \left\{ \begin{array}{lll} >0 & \text{si} & x > e^{-1} \\ <0 & \text{si} & 0 < x < e^{-1} \end{array} \right\} \Longrightarrow e^{-1}$ és mínim relatiu.
O bé calculem la 2a derivada:

$$f''(x) = \frac{f'(x)}{2}(\ln x + 1) + \frac{f(x)}{2x}, \quad f''(e^{-1}) = \frac{f(e^{-1})}{2e^{-1}} > 0 \Longrightarrow e^{-1} \text{ és mínim relatiu.}$$

3. Calculeu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{2^1}{1^0}+\dfrac{3^2}{2^1}+\dfrac{4^3}{3^2}+\cdots+\dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}$.

Resolució: El denominador és estrictament creixent i té límit $+\infty$. Apliquem Stolz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2-(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}{2n-1} = \left[\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1}\right]\cdot\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \frac{e}{2}\,.$$

4. Sigui $f(x)=\sqrt[4]{x^4-x^3}-x$. Trobeu el seu domini i calculeu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Useu aquesta informació per fer un croquis aproximat de la seva gràfica quan $x>0$. (Indicació: f és estrictament creixent si $x>0$.)

Resolució: $x^4-x^3\geq 0 \iff x^3(x-1)\geq 0 \iff \left\{\begin{array}{c} x\geq 1 \\ \text{o bé} \\ x\leq 0\end{array}\right\}$. Domini de $f=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{x^4-x^3}-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4-x^3}-x^2}{\sqrt[4]{x^4-x^3}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^4-x^3)-x^4}{(\sqrt[4]{x^4-x^3}+x)(\sqrt{x^4-x^3}+x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{(\sqrt[4]{x^4-x^3}+x)(\sqrt{x^4-x^3}+x^2)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{(\sqrt[4]{1-\dfrac{1}{x}}+1)(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+1)} = -\frac{1}{4}\,.$$