Càlcul Infinitesimal I (E. Ind.)/ Càlcul I (E. Quí.) **Codi: 21702 / 21762** **A**

Temps: 1 hora 15 minuts 29 de març de 2007

---

1. Sigui $f: R \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua en $x = a$. Aleshores podem assegurar que:

(a) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, i $\forall x$ tal que $|x-a| < \delta$ es verifica $|(x-a)f(x)| < \varepsilon$. ■

(b) $\forall M > 0,\ \exists \delta > 0$, i $\forall x$ tal que $|x-a| < \delta$ es verifica $\left|\dfrac{f(x)}{x-a}\right| > M$.

(c) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, i $\forall x$ tal que $|x-a| < \delta$ es verifica $|f(x)| < \varepsilon$.

(d) $\forall \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0$, i $\forall x$ tal que $|x-a| < \delta$ es verifica $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(e) Cap de les anteriors.

2. La funció $f(x) = \dfrac{x^2}{2} \ln |x|$, si $x \neq 0$ i $f(0) = 0$ compleix

(a) Té un màxim local i dos mínims absoluts. ■
(b) No és derivable en $x = 0$.
(c) L'equació $f(x) = 0$ té dues solucions.
(d) Té un sol punt d'inflexió.
(e) Cap de les anteriors.

3. Sigui $L = \lim\limits_{p} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{p} k^2 \sin \dfrac{\pi}{\alpha k^2}}{\ln(p!)}$, on $\alpha \neq 0$. Aleshores es verifica:

(a) $L = \dfrac{\pi^2}{\alpha^2}$. (b) $L = \dfrac{\pi}{\alpha}$. (c) $L = 0$. ■ (d) $L = \pi$. (e) Cap de les anteriors.

4. Sigui $L = \lim\limits_{p} \dfrac{\ln[(2p)!]}{\ln[(2p)^p]}$, aleshores es verifica

(a) $L = 1$. (b) $L = 0$. (c) $L = 2$. ■ (d) $L = \infty$. (e) Cap de les anteriors.

5. Considerem $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \begin{cases} e^{-(a/x^2)} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$, on a és una constant positiva. Aleshores es verifica:

(a) f és contínua a tot $\mathbb{R}$. ■
(b) f té una discontinuïtat evitable a $x = 0$.
(c) f no és contínua en $x = 0$.
(d) f no té cap asímptota horitzontal.
(e) Cap de les anteriors.

6. Considerem $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x, y) = (x + y) \sin \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{y}$, si $x \neq 0$, $y \neq 0$ i $f(x, y) = 0$, en tots els altres casos. Si anomenem $L = \lim\limits_{(0,0)} f(x, y)$, digueu quina afirmació és certa:

(a) Els límits reiterats al $(0, 0)$ valen zero, per tant $L = 0$.

(b) Els límits reiterats al $(0, 0)$ valen zero, per tant no podem afirmar que $L = 0$.

(c) No existeix cap dels límits reiterats al $(0, 0)$ per tant no existeix L.

(d) Els límits reiterats no serveixen en aquest cas per calcular L. ■

(e) Cap de les anteriors.

7. Donada la funció $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, es verifica:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.
(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ no existeix. ■
(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.
(d) f no és contínua en cap punt.
(e) Cap de les anteriors.

8. Sigui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successió definida recurrentment per: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}$, $n \geq 1$. Llavors:

(a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és monòtona creixent.
(b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ està acotada superiorment. ■
(c) $\lim\limits_{n} x_n = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$.
(d) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és divergent.
(e) Cap de les anteriors.