# Complejos

**El cuerpo de los números complejos.** El polinomio $P(x) = x^2 + 1$ no tiene raíces reales: ningun número real elevado al cuadrado y sumándole uno da cero. Para solventar problemas de este tipo se inventaron los *números complejos*.

El número complejo más sencillo es el número $\mathrm{i}$. Por definición, este número cumple que $\mathrm{i}^2 = -1$. Cualquier otro número complejo se puede escribir como

$$z = a + b\mathrm{i},$$

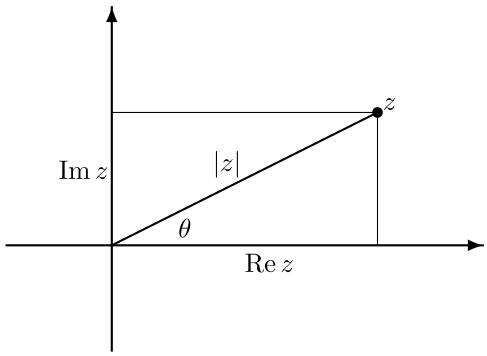
donde $a$ y $b$ son números reales. Notaremos por $\mathbb{C}$ al conjunto de los números complejos. Esta manera de escribir los números complejos se llama *forma binomial (o cartesiana)*.

El número complejo $z = a + b\mathrm{i}$ se puede representar como un punto del plano, como muestra la figura. En esta figura también hemos representado

- su *parte real*, $\operatorname{Re} z = a$.
- su *parte imaginaria*, $\operatorname{Im} z = b$.
- su *módulo*, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- su *argumento*, $\operatorname{Arg} z = \theta$, donde $\theta$ es el ángulo determinado por las fórmulas

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \qquad \sin\theta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}, \qquad \tan\theta = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}.$$

Importante: Un número complejo tiene infinitos argumentos diferentes, debido a que $\theta$ y $\theta + 2\pi$ representan al mismo ángulo. Los argumentos se dan en radianes. ¡Ojo con las calculadoras!




*Ejercicio.* Calcular el módulo y el argumento del número $\mathrm{i}$.

*Ejercicio.* Dibujar el número $z$ tal que $|z| = 1$ y $\operatorname{Arg} z = \pi/4$.

Las cuatro operaciones elementales en forma binomial se realizan así.

- Suma: $(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}$.
- Resta: $(a + b\mathrm{i}) - (c + d\mathrm{i}) = (a - c) + (b - d)\mathrm{i}$.
- Producto: $(a + b\mathrm{i}) \cdot (c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}$.
- Cociente: $\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}} = \frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}\frac{c-d\mathrm{i}}{c-d\mathrm{i}} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)\mathrm{i}}{c^2+d^2}$.
  (Multiplicado numerador y denominador por el conjugado del denominador. El *conjugado* de $z = c + d\mathrm{i}$ es $\bar{z} = c - d\mathrm{i}$, se cambia el signo de su parte imaginaria.)

*Problemas relacionados.* 3 y 5.

**La forma exponencial y la fórmula de Euler. Potencias y raíces.** Sumar y restar números complejos es muy fácil. Multiplicarlos y dividirlos, no tanto; pero podemos simplificarlo escribiendo el número complejo $z$ en su *forma exponencial*

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \qquad r = |z|, \qquad \theta = \operatorname{Arg} z$$

o, equivalentemente, en su *forma polar* $z = r_\theta$.

*Ejercicio.* Calcular la forma exponencial de los números 1, i, $-1$ y $-$i.

*Ejercicio.* Calcular la forma binomial de los números $\mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi}$, $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ y $6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$.

*Ejercicio.* Usar la *fórmula de Euler*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

para ver de donde sale la forma exponencial de los números complejos.

*Problema relacionado.* 1.

La forma exponencial de un número complejo es útil para multiplicar, dividir y calcular su conjugado, sus potencias o sus raíces de forma fácil y cómoda.

- Producto: $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \cdot \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = r\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\varphi)}$.
- Cociente: $\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = (r/\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)}$.
- Conjugado: Si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, entonces $\bar{z} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.
- Potencias: Si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, entonces $z^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.
- Raíces: El número $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ tiene $n$ raíces $n$-ésimas, a saber

$$z_k = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2\pi k)/n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

  Las raíces $n$-ésimas forman un poligono regular de $n$ lados centrado en el origen.

*Ejercicio.* Comprobar que la potencia $n$-ésima de cualquier $z_k$ es igual a $z$.

*Ejercicio.* Comprobar que $z_k$ y $z_{k+n}$ son el mismo número.

*Ejercicio.* Calcular y dibujar las raíces cuartas del número 1.

*Problemas relacionados.* 2, 4 y 7.

**La interpretación geométrica del producto.** El producto de dos números complejos en forma exponencial consiste en multiplicar los módulos y sumar los argumentos. Por tanto, la operación de multiplicar por el número complejo $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ se puede interpretar como una rotación de ángulo $\theta$ y un homotecia de razón $r$. Cuando $r > 1$, el módulo se estira, de lo contrario se encoge.

Este hecho sirve para resolver ciertos problemas geométricos en el plano.

*Problemas relacionados.* 6, 9 y 10.

**Problemas para no dormir.** Los problemas 8 y 11 son bastante complicados. Recordad que un *rombo* es un cuadrilátero tal que sus diagonales se cortan perpendicularmente en sus puntos medios. Un *cuadrado* es un tipo particular de rombo tal que sus diagonales tienen la misma longitud.