

Determinantes

Determinantes de matrices cuadradas. El *determinante de una matriz cuadrada* se puede definir recursivamente mediante desarrollos por columnas o por filas. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$, donde i es el índice de la fila y j es el índice de la columna. Notamos por A_{ij} la matriz $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene al quitar la fila i y la columna j de la matriz A . Entonces

- Desarrollo por la fila i : $\det A = |A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$.
- Desarrollo por la columna j : $\det A = |A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$.

Aplicando repetidamente estas fórmulas, vamos reduciendo el orden de las determinantes hasta llegar a determinantes de órdenes uno, dos o tres que se pueden calcular usando las *reglas de Sarrus*:

$$\begin{aligned} |a_{11}| &= a_{11} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}. \end{aligned}$$

El valor del determinante no depende de las filas o columnas escogidas. La dificultad del cálculo probablemente sí.

Las principales propiedades de los determinantes de matrices cuadradas son las siguientes.

1. Si una columna es cero, el determinante es cero.
2. Si hay dos columnas iguales, el determinante es cero.
3. Si las columnas son ld, el determinante es cero.
4. El determinante cambia de signo al permutar dos columnas.
5. El determinante no cambia si a una columna se le suma una cl de las restantes.
6. El determinante es lineal respecto a cada columna:
 - $\det(\dots, c_i + c'_i, \dots) = \det(\dots, c_i, \dots) + \det(\dots, c'_i, \dots)$.
 - $\det(\dots, \lambda c_i, \dots) = \lambda \det(\dots, c_i, \dots)$.
7. Las filas también cumplen las anteriores propiedades.
8. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
9. El determinante del producto es igual al producto de determinantes: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
10. Una matriz A es invertible si y solo si $\det A \neq 0$. Además, $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.
11. Una matriz y su transpuesta tienen el mismo determinante: $\det(A^T) = \det A$.
12. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos diagonales.
13. El determinante de una matriz triangular por bloques es igual al producto de los determinantes de los bloques diagonales.

Ejercicio. Comprobad mediante ejemplos que $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ y $\det(\lambda A) \neq \lambda \det A$.

Ejercicio. Probar que $\det(A^k) = (\det A)^k$ si $k \in \mathbb{N}$. Si A es invertible, la fórmula también se cumple cuando $k \in \mathbb{Z}$.

El método de Gauss para calcular determinantes. No es una buena idea aplicar la definición para calcular determinantes de matrices grandes. Es mejor convertir la matriz inicial en una matriz triangular mediante una cadena de operaciones del siguiente tipo:

- Sumarle a una columna (o fila) un cl de las restantes.

Estas operaciones no modifican el valor del determinante. Es importante recordar que si permutamos dos columnas (o filas) o multiplicamos una columna (o fila) por un número el valor del determinante sí se modifica.

Problemas relacionados. 1, 2, 4 y 9.

El determinante de Vandermonde. Dados $n + 1$ números x_0, \dots, x_n , se cumple que

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 & \cdots & (x_0)^n \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & \cdots & (x_1)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & (x_{n-1})^2 & \cdots & (x_{n-1})^n \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \cdots & (x_n)^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Nótese que $V(x_0, \dots, x_n) \neq 0$ cuando los números x_0, x_1, \dots, x_n son diferentes entre sí.

Un método para calcular rangos. Los *menores de orden r* de una matriz (cuadrada o no) son aquellas matrices $r \times r$ que se obtienen tachando una cantidad adecuada de filas y columnas de la matriz inicial. Por ejemplo, una matriz 3×4 tiene: cuatro menores de orden 3, dieciocho menores de orden 2 y doce menores de orden uno.

El rango de una matriz es igual al mayor orden de los menores cuyo determinante es diferente de cero. Si hay algún menor de orden r y determinante no nulo, entonces el rango es mayor o igual que r . Cuando todos los menores de orden r tienen determinante cero, el rango es menor que r .

Ejercicio. ¿Cuántos menores de orden r tiene una matriz $n \times m$? Respuesta: $\binom{n}{r} \binom{m}{r}$.

El método de Cramer para resolver sistemas. Si A es una matriz $n \times n$ invertible y b un vector de n componentes, entonces el sistema lineal clásico $Ax = b$ siempre es compatible determinado y su solución se puede expresar mediante la *regla de Cramer*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

donde A_i es la matriz que se obtiene al substituir la columna i de la matriz A por la columna b . Si la matriz A es grande, la regla de Cramer es peligrosa.

Problema relacionado. 7.

Un método para invertir matrices. Si A es una matriz invertible, $\det A \neq 0$ y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{Adj } A)^\top,$$

donde $\text{Adj } A$ es la *matriz adjunta* de A . La matriz adjunta se calcula así:

$$\text{Adj } A = (\alpha_{ij}) \quad \alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Ejercicio. Probar la fórmula anterior sabiendo que si x_j es la columna j de la inversa de A y e_j es el vector j de la base canónica, entonces $Ax_j = e_j$, $j = 1, \dots, n$. (Indicación: Cramer.)

Problema relacionado. 6.

El determinante de n vectores. Sea E un ev de dimensión n y $U = (u_1, \dots, u_n)$ una de sus bases. Sean $v_1, \dots, v_n \in E$ tales que $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i$. Sea $A = (a_{ij})$. Es decir, la columna j de la matriz A es igual a las coordenadas del vector v_j en la base U . Entonces

$$\det_U(v_1, \dots, v_n) := \det A.$$

El valor del determinante depende de la base escogida, pero los vectores v_1, \dots, v_n son ld si y sólo si su determinante (en cualquier base) es cero.

Problema relacionado. 5.

El determinante de un endomorfismo. Sea E un ev de dimensión finita y $f : E \rightarrow E$ un endomorfismo. Sea A la matriz de f en una base U de E , es decir, $A = M_U^U(f)$. Entonces

$$\det f := \det A.$$

El valor del determinante no depende de la base escogida y f es biyectiva si y sólo si $\det f \neq 0$.

Problema relacionado. 8.