Jordan

Ejemplo introductorio. Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ el endomorfismo definido por

$$f : P(x) \mapsto 2P(x) + P'(x) + P''(x) + P'''(x).$$

La matriz de f en base natural N de $\mathbb{R}_3[x]$ es

$$A = M_N^N(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vamos a intentar diagonalizar este endomorfismo. Como la matriz A es triangular, resulta fácil calcular el polinomio característico: $Q_f(t) = (2-t)^4$. Por tanto, $\lambda = 2$ es el único VAP de f.

Un polinomio $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ es un VEP de VAP $\lambda = 2$ del endomorfismo f si y sólo si $2P(x) + P'(x) + P''(x) + P'''(x) = f(P(x)) = 2 \cdot P(x)$, o sea, si y sólo si

$$(2a_0 + a_1 + 2a_2 + 6a_3) + (2a_1 + 2a_2 + 6a_3)x + (2a_2 + 3a_3)x^2 + 2a_3 x^3 = 2a_0 + 2a_1 x + 2a_2 x^2 + 2a_3 x^3.$$

Resolviendo el sistema resultante, obtenemos que $a_3 = a_2 = a_1 = 0$ y $a_0 \in \mathbb{R}$ queda libre. Así pues, $\lambda = 2$ es el único VAP de f y los polinomios de grado cero son sus únicos VEPs: $\mathrm{Nuc}(f - 2 \cdot \mathrm{Id}) = \mathbb{R}_0[x]$, de forma que $\mathrm{ma}(2) = 4$ y $\mathrm{mg}(2) = \dim[\mathrm{Nuc}(f - 2 \cdot \mathrm{Id})] = 1$. Por tanto, f no diagonaliza.

Transcurridos unos (breves) momentos de pánico, decidimos que no está todo perdido y buscamos una base en la cual la matriz de f quede lo más simple posible, aunque no sea una matriz diagonal. Concretamente, nos sacamos de la manga la base U de $\mathbb{R}_3[x]$ formada por los polinomios

$$P_1(x) = x^3 \qquad P_2(x) = 6 + 6x + 3x^2 \qquad P_3(x) = 12 + 6x \qquad P_4(x) = 6.$$

Resulta sencillo comprobar que las imágenes de los elementos de esta base son:

$$\begin{aligned} f(P_1(x)) &= \lambda \cdot P_1(x) + P_2(x) = 2 \cdot P_1(x) + P_2(x) \\ f(P_2(x)) &= \lambda \cdot P_2(x) + P_3(x) = 2 \cdot P_2(x) + P_3(x) \\ f(P_3(x)) &= \lambda \cdot P_3(x) + P_4(x) = 2 \cdot P_3(x) + P_4(x) \\ f(P_4(x)) &= \lambda \cdot P_4(x) = 2 \cdot P_4(x). \end{aligned}$$

Por tanto, la matriz del endomorfismo f en la base U es:

$$J = M_U^U(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

donde $\lambda = 2$ es el único VAP del endomorfismo f.

Ejercicio. Ver que $SJ = AS$, si S es la matriz del cambio de base que pasa de base U a base N:

$$S = C_N^U = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Indicación: No es necesario matarse haciendo el cálculo, basta recordar que $M_U^U(f) = C_U^N M_N^N(f) C_N^U$.)

Antes de pasar a las definiciones, observamos que una base $V = (Q_1(x), Q_2(x), Q_3(x), Q_4(x))$ de $\mathbb{R}_3[x]$ cumple que $M_V^V(f) = J$ si y sólo si

$$\begin{aligned} Q_2(x) &= (f - \lambda \cdot \mathrm{Id})(Q_1(x)) \\ Q_3(x) &= (f - \lambda \cdot \mathrm{Id})(Q_2(x)) = (f - \lambda \cdot \mathrm{Id})^2(Q_1(x)) \\ Q_4(x) &= (f - \lambda \cdot \mathrm{Id})(Q_3(x)) = (f - \lambda \cdot \mathrm{Id})^3(Q_1(x)). \end{aligned}$$

Es decir, la elección del primer elemento $Q_1(x)$ de la base V, determina el resto de la base.

Ejercicio. ¡Entender bien esto! A continuación, comprobar que se obtiene a partir de $Q_1(x) = x^2$. (Respuesta: $Q_2(x) = 2 + 2x$, $Q_3(x) = 2$ y $Q_4(x) = 0$, luego V no es una base. ¡Qué mala suerte!)

Bloques de Jordan, matrices de Jordan y bases de Jordan. Dado un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ y un natural $r \in \mathbb{N}$, $J_r(\lambda)$ denotará la matriz $r \times r$ cuyos elementos diagonales son igual al escalar λ, cuyos elementos subdiagonales son igual a uno y el resto son nulos. Por ejemplo,

$$J_1(\lambda) = (\lambda) \qquad J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad J_4(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Las matrices de la forma $J_r(\lambda)$ son *bloques de Jordan*. Las matrices diagonales por bloques, cuyos bloques diagonales son bloques de Jordan, son *matrices de Jordan*. Por ejemplo, hay seis tipos diferentes de matrices 3×3 de Jordan, a saber:

$$\begin{gathered} D = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda, \lambda) \quad D' = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda, \mu) \quad D'' = \operatorname{diag}(\lambda, \mu, \eta) \\ J = J_3(\lambda) \quad J' = \operatorname{diag}(J_2(\lambda), \lambda) \quad J'' = \operatorname{diag}(J_2(\lambda), \mu). \end{gathered}$$

Tradicionalmente, el orden de los bloques no se tiene en cuenta. Por ejemplo, se considera que las matrices $\operatorname{diag}(J_2(\lambda), \lambda)$ y $\operatorname{diag}(\lambda, J_2(\lambda))$ representan la misma forma reducida de Jordan.

Si tenemos un endomorfismo $f : E \to E$ y una base U del ev E tal que $J = M_U^U(f)$ es una matriz de Jordan, diremos que J es la *matriz de Jordan de f* o también que es la *forma reducida de Jordan de f*, mientras que U es una *base de Jordan de f*. Estas definiciones plantean las siguientes preguntas:

- ¿Es verdad que todos los endomorfismos tiene una (única) matriz de Jordan?
- ¿Cómo se calcula la matriz de Jordan de un endomorfismo?
- ¿Cómo se calcula una base de Jordan de un endomorfismo?

Jordan de matrices versus Jordan de endomorfismos. Sea $f : E \to E$ un endomorfismo de un $\mathbb{K}$-ev de dimensión n. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ la matriz de f en alguna base de E. El problema de encontrar la forma reducida de Jordan del endomorfismo f es similar al problema de encontrar la forma reducida de Jordan de la matriz A, ya que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- Existe una base $U = (u_1, \ldots, u_n)$ de E, unos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ y otros escalares $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1} \in \{0, 1\}$ tales que
$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(u_1) & = & \lambda_1 u_1 + \gamma_1 u_2 \\ f(u_2) & = & \lambda_2 u_2 + \gamma_2 u_3 \\ & \vdots & \\ f(u_{n-1}) & = & \lambda_{n-1} u_{n-1} + \gamma_{n-1} u_n \\ f(u_n) & = & \lambda_n u_n. \end{array} \right.$$
- Existe una base U de E tal que la matriz $M_U^U(f)$ es de Jordan.
- Existen en $M_n(\mathbb{K})$ una matriz de Jordan J y una matriz invertible S tales que $SJ = AS$.

Sólo hablaremos de matrices pues son más sencillas que los endomorfismos. Cuando nos pidan trabajar con un endomorfismo realizaremos los siguientes pasos:

1. Calcular la matriz del endomorfismo en alguna base adecuada.
2. Estudiar la forma reducida de Jordan de esa matriz.
3. Trasladar los resultados al contexto inicial.

Sev invariantes, restricciones y diagonalización por bloques. Sea $f : E \to E$ un endomorfismo de un $\mathbb{K}$-ev, $U = (u_1, \ldots, u_n)$ una base de E y $A = M_U^U(f)$ la matriz del endomorfismo f en la base U. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- Los sev $F = [u_1, \ldots, u_r]$ y $G = [u_{r+1}, \ldots, u_n]$ son invariantes por el endomorfismo f.
- Existen unas matrices $B \in M_r(\mathbb{K})$ y $C \in M_{n-r}(\mathbb{K})$ tales que $A = \begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}$.

Por tanto, existe una relación entre los sev invariantes y la diagonalización por bloques. Esto hace que la búsqueda de sev invariantes sea uno de los aspectos claves de este tema. A nivel teórico, efectuaremos esta búsqueda en dos pasos:

- En el *Primer Teorema de Descomposición*, asociaremos a cada VAP un gran sev invariante.
- En el *Segundo Teorema de Descomposición*, trocearemos esos sev invariantes en otros menores.

A nivel práctico, daremos un algoritmo que resuelve completamente el problema de una sola tacada.

A continuación, listamos otras propiedades interesantes de los sev invariantes.

- La suma e interseccion de sev invariantes también son sev invariantes.
- $[u]$ es un sev invariante por f si y sólo si u es un VEP de f.
- Si λ es un VAP de f, entonces el sev propio $E_\lambda = \mathrm{Nuc}(f - \lambda \cdot \mathrm{Id})$ es invariante por f.
- Si $Q(t) \in \mathbb{K}[t]$, entonces los sev $\mathrm{Nuc}[Q(f)]$ e $\mathrm{Im}[Q(f)]$ son invariantes por f.

Ejercicio. Sea $f : E \to E$ un endomorfismo y $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ una base de E. Supongamos que los sev $F = [u_1, u_2, u_3]$ y $G = [u_2, u_3, u_4]$ son invariantes por f y sea $A = M_U^U(f) = (a_{ij})$ la matriz del endomorfismo f en la base U. ¿Qué elementos de la matriz A podemos afirmar que son nulos? (Respuesta: $a_{41}, a_{12}, a_{42}, a_{13}, a_{43}, a_{14}$.)

Sea $f : E \to E$ un endomorfismo y F un sev invariante por f. Entonces podemos definir el endomorfismo $f_{|F} : F \to F$ tal que

$$f_{|F}(v) = f(v) \qquad \forall v \in F.$$

Esta aplicación es la *aplicación restricción de f en F*.

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ la aplicación de la introducción y sea $F = \mathbb{R}_1[x]$. Resulta que F es un sev invariante por f. Además, la matriz de la restricción $f_{|F}$ en la base W del sev F formada por los polinomios $P_3(x) = 12 + 6x$ y $P_4(x) = 6$ es

$$M_W^W(f_{|F}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El polinomio mínimo. El *polinomio mínimo* de una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ es el polinomio mónico de grado mínimo $P_A(t)$ tal que

$$P_A(A) = \mathbf{0}.$$

Ejercicio. Probar que la definición anterior es correcta. Es decir, probar que no pueden existir dos polinomios diferentes mónicos de grado mínimo que anulen a la matriz A.

Las principales propiedades del polinomio mínimo son las siguientes.

- Las raíces del polinomio mínimo coinciden con los VAPs: $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0$.
- El polinomio mínimo divide a los polinomios que anulan a A: $Q(A) = \mathbf{0} \Rightarrow P_A(t)|Q(t)$.
- El polinomio mínimo divide al polinomio característico: $P_A(t)|Q_A(t)$.
- $\mathrm{gr}[P_A(t)] \le \mathrm{gr}[Q_A(t)] = n$.
- Si $Q_A(t)$ descompone totalmente en $\mathbb{K}$, es decir, si $Q_A(t) = \prod_{j=1}^{l} (\lambda_j - t)^{\alpha_j}$ con $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{K}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{N}$, entonces
  - $P_A(t) = \prod_{j=1}^{l} (t - \lambda_j)^{\beta_j}$ con $1 \le \beta_j \le \alpha_j$ para toda $j = 1, \ldots, l$.
  - La matriz A diagonaliza si y sólo si $\beta_j = 1$ para toda $j = 1, \ldots, l$.
- El polinomio mínimo es invariante por cambios de base: $B = S^{-1}AS \Rightarrow P_B(t) = P_A(t)$.

Ejercicio. Calcular el polinomio mínimo y el polinomio característico de las matrices

$$D = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \lambda) \qquad J = J_3(\lambda) \qquad J' = \mathrm{diag}(J_2(\lambda), \lambda).$$

(Respuesta: $Q_D(t) = Q_J(t) = Q_{J'}(t) = (\lambda - t)^3$, $P_D(t) = t - \lambda$, $P_J(t) = (t - \lambda)^3$ y $P_{J'}(t) = (t - \lambda)^2$.)

Primer Teorema de Descomposición. Sea $f : E \to E$ un endomorfismo de un $\mathbb{K}$-ev tal que su polinomio característico descompone totalmente en $\mathbb{K}$: $Q_f(t) = \prod_{j=1}^{l}(\lambda_j - t)^{\alpha_j}$. Aquí, $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{K}$ son los VAPs de f y los exponentes $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{N}$ son sus multiplicidades algebraicas: $\mathrm{ma}(\lambda_j) = \alpha_j$.

Vamos a descomponer E como una suma de sev invariantes asociados a los diferentes VAPs del endomorfismo f. Sea $P_f(t) = \prod_{j=1}^{l}(t - \lambda_j)^{\beta_j}$ el polinomio mínimo, con $1 \le \beta_j \le \alpha_j$. Sabemos que los sev $\bar{E}_j = \mathrm{Nuc}(f - \lambda_j \cdot \mathrm{Id})^{\alpha_j}$ son invariantes. Sean $\bar{f}_j = f_{|\bar{E}_j} : \bar{E}_j \to \bar{E}_j$ sus restricciones. Entonces:

- $\dim \bar{E}_j = \alpha_j$ y $\bar{E}_j = \mathrm{Nuc}(f - \lambda_j \cdot \mathrm{Id})^{\beta_j}$.
- La primera descomposición es: $E = \bar{E}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{E}_l$.
- $Q_{\bar{f}_j}(t) = (\lambda_j - t)^{\alpha_j}$ y $P_{\bar{f}_j}(t) = (t - \lambda_j)^{\beta_j}$.

Segundo Teorema de Descomposición. A lo largo de esta sección supondremos que estamos en las siguientes hipótesis. Sea $\bar{f} : \bar{E} \to \bar{E}$ un endomorfismo tal que $\dim \bar{E} = \alpha$, $Q_{\bar{f}}(t) = (\lambda - t)^{\alpha}$ y $P_{\bar{f}}(t) = (t - \lambda)^{\beta}$, con $1 \le \beta \le \alpha$. Es decir, $\bar{E}$ es como los sev invariantes que acabamos de obtener en la primera descomposición. Queremos descomponer $\bar{E}$ en sev invariantes más pequeños.

Si calculamos las dimensiones $k_j = \dim[\mathrm{Nuc}(\bar{f} - \lambda \cdot \mathrm{Id})^j]$, para $j = 1, \dots, \beta$, resulta que

$$1 \le \mathrm{mg}(\lambda) = k_1 < k_2 < \cdots < k_\beta = \alpha = \mathrm{ma}(\lambda).$$

Después, dibujamos un diagrama de cajas con k_1 cajas en el primer piso, $k_2 - k_1$ cajas en el segundo, $k_3 - k_2$ en el tercero, etc. El exponente $\alpha = \mathrm{ma}(\lambda)$ del polinomio característico es igual al número total de cajas del diagrama, el exponente β del polinomio mínimo da la altura del diagrama y la multiplicidad geométrica $p = k_1 = \mathrm{mg}(\lambda)$ es igual al número de cajas del primer piso. El diagrama estará escalonado, es decir, un piso no puede contener mas cajas que el inferior.

Sea δ_j la altura de la columna j. Entonces $\beta = \delta_1 \ge \delta_2 \ge \cdots \delta_p \ge 1$ y $\delta_1 + \cdots + \delta_p = \alpha$. En estas condiciones, existen p vectores $u_1, \dots, u_p \in \bar{E}$ tales que los α vectores

$$\left\{ \begin{array}{c} u_1, (\bar{f} - \lambda \cdot \mathrm{Id})(u_1), \dots, (\bar{f} - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{\delta_1 - 1}(u_1) \\ u_2, (\bar{f} - \lambda \cdot \mathrm{Id})(u_2), \dots, (\bar{f} - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{\delta_2 - 1}(u_2) \\ \vdots \\ u_p, (\bar{f} - \lambda \cdot \mathrm{Id})(u_p), \dots, (\bar{f} - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{\delta_p - 1}(u_p) \end{array} \right.$$

forman una base de $\bar{E}$ y la matriz de la aplicación $\bar{f}$ en esta base es la matriz de Jordan

$$J = \mathrm{diag}(J_{\delta_1}(\lambda), \dots, J_{\delta_2}(\lambda)).$$

En particular, los sev $F_j = [u_j, (\bar{f} - \lambda \cdot \mathrm{Id})(u_j), \dots, (\bar{f} - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{\delta_j - 1}(u_j)]$, $j = 1, \dots, p$, son invariantes por $\bar{f}$ y la segunda descomposición es $\bar{E} = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Ejercicio. Probar que $\bar{f}$ es diagonalizable si y sólo si $\beta = 1$. Probar que un endomorfismo general $f : E \to E$ cuyo polinomio mínimo es $P_f(t) = \prod_{j=1}^{l}(t - \lambda_j)^{\beta_j}$ diagonaliza si y sólo si $\beta_1 = \cdots = \beta_l = 1$.

Problemas relacionados. 1, 2 y 3.

Una pregunta natural es ¿cómo se encuentran los vectores $u_1, \dots, u_p \in \bar{E}$? Es decir, ¿cuándo forman una base los α vectores anteriores? Respuesta: Si y sólo si los p vectores

$$(\bar{f} - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{\delta_1 - 1}(u_1), (\bar{f} - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{\delta_2 - 1}(u_2), \dots (\bar{f} - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{\delta_p - 1}(u_p)$$

son li. Además, estos p vectores son una base del sev propio $\bar{E}_\lambda = \mathrm{Nuc}(\bar{f} - \lambda \cdot \mathrm{Id})$. En particular, son VEPs de VAP λ del endomorfismo $\bar{f}$.

Un truco útil consiste en colocar cada uno de estos α vectores en una de las α cajas del diagrama, siguiendo una reglas fáciles de recordar que explicaremos en la próxima sección.

El algoritmo de Jordan. El algoritmo estándar para calcular la forma de Jordan J de una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ cuyo polinomio característico descompone totalmente consta de los siguientes pasos.

1. Calcular y factorizar el polinomio característico: $Q_A(t) = \prod_{j=1}^{l}(\lambda_j - t)^{\alpha_j}$.
2. Para cada VAP $\lambda = \lambda_j$ de multiplicidad algebraica $\alpha = \alpha_j$, tenemos que:
   a) Calcular las dimensiones $k_j = \dim[\mathrm{Nuc}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^j]$, $j = 1, \dots, \beta$, siendo β el primer número tal que $k_\beta = \alpha$.
   b) Dibujar el diagrama de cajas con k_1 cajas en el primer piso, $k_2 - k_1$ cajas en el segundo, $k_3 - k_2$ en el tercero, etc. El diagrama tiene α cajas, β pisos y k_1 columnas.
   c) A cada columna del diagrama, le asociamos el bloque de Jordan $J_\delta(\lambda)$, donde δ es la altura de la columna.
3. La matriz de Jordan J tiene todos los bloques anteriores en la diagonal.

Si además queremos encontrar una matriz invertible $S \in M_n(\mathbb{K})$ tales que $SJ = AS$, entonces:

4. Situamos un vector en cada caja de los diagramas anteriores del siguiente modo:
   a) *Escoger el techo.* En la caja superior (techo) de cada columna ponemos cualquier vector $u \in \mathrm{Nuc}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^\delta$ tal que $u \notin \mathrm{Nuc}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{\delta-1}$, siendo λ el VAP de ese diagrama y δ la altura de esa columna.
   b) *Bajar al suelo.* En el resto de cajas de la columna colocamos los vectores
   $$(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})(u), (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^2(u), \dots, (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{\delta-1}(u)$$
   de arriba a abajo, donde u es el vector que hemos situado en la caja superior.
   c) *Comprobar el suelo.* Los vectores de las cajas inferiores (suelo) deben ser li. (Además, son VEPs.) Si no, cambiamos algunos vectores del techo y repetimos los pasos (b) y (c).
5. Esos vectores, ordenados de arriba a abajo y de izquierda a derecha, son una base de Jordan.
6. S se construye poniendo los vectores de la base de Jordan por columnas.
7. Comprobar que $SJ = AS$. (Opcional.)

Problemas relacionados. Clasificamos los problemas de cálculo de Jordan en 4 tipos, según dificultad:

- Jordan con un único bloque: 5c, 5e, 6b y 16a.
- Jordan con varios bloques, pero con un único VAP: 4, 5a, 5b y 5d.
- Jordan con varios VAPs: 5f.
- Jordan con parámetros: 6a.

Trucos. Los siguientes trucos pueden ser útiles en ocasiones:

- *VAPs de multiplicidad geométrica igual a uno.* Si λ es un VAP tal que $\mathrm{ma}(\lambda) = \alpha$ y $\mathrm{mg}(\lambda) = 1$, entonces $\beta = \alpha$ y $k_j = j$ para $j = 1, \dots, \beta$. Es decir, el diagrama de λ sólo tiene una columna.
- *Simplificando el cálculo de β.* Sea λ un VAP tal que $\mathrm{ma}(\lambda) = \alpha$. Supongamos que al calcular las dimensiones $k_j = \dim[\mathrm{Nuc}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^j]$, $j \geq 1$, vemos que una de ellas es $k_s = \alpha - 1$. Entonces no hace falta seguir, pues $k_\beta = k_{s+1} = \alpha$. Es decir, cuando sólo nos queda una caja, sólo podemos colocarla en un sitio: encima de la penúltima.
- *Matrices con un único VAP.* Si la matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ tiene un único VAP: $\sigma(A) = \{\lambda\}$, entonces $Q_A(t) = (\lambda - t)^\alpha$ y $P_A(t) = (t - \lambda)^\beta$ con $n = \alpha \geq \beta \geq 1$. En este caso, siempre podremos conseguir que el primer vector de la base de Jordan sea un vector de la base natural $N = (e_1, \dots, e_n)$. Basta encontrar e_j tal que $(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{\beta-1} e_j \neq \mathbf{0}$. (Ejemplo: Problema 4.)
- *¿Cuántos VEPs tiene una base de Jordan?* Los vectores del suelo son VEPs y el resto no. Por tanto, basta contar las cajas del suelo.
- *Obteniendo información del polinomio mínimo y similares.* Veamos dos ejemplos:
  - Sea $f : E \to E$ un endomorfismo tal que $f^3 = 4 \cdot f$. Es decir, el polinomio $P(t) = t^3 - 4t = t(t-2)(t+2)$ anula a f, luego $P_f(t) | P(t)$. Esto implica que todos los factores del polinomio mínimo son simples y, por tanto, f diagonaliza. Si además sabemos que $f^2 \neq 4 \cdot \mathrm{Id}$, entonces $P_f(0) = 0$ y f no es invertible.

- Sea $f : E \to E$ un endomorfismo tal que $f^2 - 2 \cdot f + \mathrm{Id} = \mathbf{0}$. Es decir, el polinomio $P(t) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$ anula a f, luego $P_f(t)|P(t)$. Por tanto, el único VAP de f es $\lambda = 1$. Si además sabemos que $f \neq \mathrm{Id}$, entonces $P_f(t) = (t-1)^2$ y f no es diagonalizable.

Cálculo de sev invariantes. Una vez hemos encontrado una base de Jordan poniendo un vector en cada caja del diagrama, resulta sencillo encontrar varios sev invariantes, aunque no todos. La idea consiste en buscar sev invariantes que esten generados por algunos vectores de la base de Jordan. La cuestión es ¿cómo se escogen los vectores de la base de Jordan de forma que el sev que generen sea invariante? La respuesta es la siguiente: *Si cogemos un vector de la base de Jordan, también tenemos que coger todos los vectores de la base de Jordan situados en las cajas inferiores de esa columna.*

Ejercicio. Probar que esto funciona.

Problemas relacionados. 7 y 11.

Equivalencia de matrices o endomorfismos. Decimos que dos matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ son *equivalentes* cuando existe una matriz invertible $S \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $B = S^{-1}AS$. Es decir, cuando puede pasar de una a otra mediante un cambio de base. En tal caso, escribiremos el símbolo $A \sim B$. (Desafortunadamente, es el mismo símbolo que el usado cuando se escalona una matriz mediante transformaciones elementales, pero son cosas diferentes.) Análogamente, decimos que dos endomorfismos $f, g : E \to E$ son *equivalentes* cuando existen dos bases U y V del ev E tales que $M_U^U(f) = M_V^V(g)$.

Los resultados principales relacionados con matrices equivalentes son:

- $A \sim B \Leftrightarrow J_A = J_B$, donde J_A y J_B son las formas de Jordan de A y B.
- $A \sim B \Rightarrow \det A = \det B$ y $\operatorname{traza} A = \operatorname{traza} B$.
- $A \sim B \Rightarrow Q_A(t) = Q_B(t)$ y $P_A(t) = P_B(t)$.

Así pues, matrices con diferentes determinantes (o trazas, o polinomios característicos, o polinomios mínimos) no pueden ser equivalentes. Estos resultados también son válidos para endomorfismos.

Problemas relacionados. 8, 9 y 10.

Problemas para no dormir. 12, 13, 14, 15, 16b y 17.