

# Material de Examen de Álgebra Lineal

Recopilado por Rafael Ramírez Ros  
(<http://www.ma1.upc.edu/~rafael/al/>)

VERSIÓN 2.4 : Junio de 2007.  
Copyright ©Rafael Ramírez Ros

La reproducción total o parcial de esta recopilación, sin modificaciones, está permitida por cualquier procedimiento, incluyendo la reprografía y el tratamiento informático, siempre y cuando consten los datos del recopilador, se haga sin ánimo de lucro y se siga este mismo criterio de distribución.

Si se distribuyen partes de esta recopilación, se deben incluir instrucciones sobre cómo obtener la versión completa.

Cualquier traducción o trabajo derivado de esta obra tiene que ser aprobado por el recopilador antes de su distribución.

Rafael Ramírez Ros ( $R^3$ )  
Universidad Politécnica de Cataluña (UPC)  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona (ETSEIB)  
Departamento de Matemática Aplicada 1 (MA1)  
Diagonal 647  
08028 Barcelona (España)  
mail: [rafael@vilma.upc.edu](mailto:rafael@vilma.upc.edu)  
web: <http://www.ma1.upc.edu/~rafael/>

## Índice general

|                                     |           |
|-------------------------------------|-----------|
| Prefacio                            | v         |
| <b>Parte 1. Preguntas de examen</b> | <b>1</b>  |
| Complejos                           | 3         |
| Polinomios                          | 5         |
| Matrices                            | 9         |
| Determinantes                       | 15        |
| Espacios Vectoriales                | 17        |
| Aplicaciones Lineales               | 23        |
| Diagonalización                     | 31        |
| Jordan                              | 35        |
| <b>Parte 2. Problemas de examen</b> | <b>39</b> |
| Polinomios                          | 41        |
| Espacios vectoriales                | 43        |
| Aplicaciones lineales               | 45        |
| Diagonalización                     | 51        |
| Jordan                              | 57        |



## Prefacio

En estas páginas el lector encontrará más de trescientas preguntas y más de cincuenta problemas de álgebra lineal clasificados por temas que han aparecido a lo largo de los últimos años en diversos tests (tanto parciales como finales), pruebas de evaluación continuada y exámenes finales de las asignaturas de álgebra lineal realizados en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona (<http://www.etseib.upc.edu/>) de la Universidad Politécnica de Cataluña (<http://www.upc.edu/>).

Este material ha sido preparado por el equipo de profesores del Departamento de Matemática Aplicada 1 (<http://www.ma1.upc.edu/>) que ha impartido esas asignaturas durante los últimos años.

Resolver cada pregunta, salvo en contadas excepciones, no debería requerir más de diez minutos por pregunta cuando se está bien preparado. Resolver cada problema no debería requerir más de una hora. Las preguntas provienen mayoritariamente de pruebas de tipo test cerradas con cinco opciones por pregunta (*a*, *b*, *c*, *d* y *e*). Las de tipo computacional han sido reformuladas para no dar pistas sobre la respuesta, persiguiendo con esto que el lector deba efectuar el cálculo completo y no pueda “escaquearse”. Las de tipo teórico no se han modificado, excepto para quitar la opción *e*. *Ninguna de las anteriores*, que tradicionalmente nunca es la respuesta correcta.

Existe una versión de esta recopilación con las respuestas a cada pregunta, pero se recomienda intentar resolver las preguntas antes de mirar las respuestas.

De cara a uniformizar la recopilación, se han adoptado las notaciones usadas en unos apuntes que se pueden descargar de la siguiente página web:

<http://www.ma1.upc.edu/~rafael/al/>

El recopilador espera que este trabajo resulte útil y no contenga demasiados errores. Cualquier comentario constructivo será bienvenido.

Rafael Ramírez Ros  
Barcelona, a 23 de junio de 2007

*Si tiene solución, ¿por qué te preocupas?  
Si no tiene solución, ¿por qué te preocupas?  
(Proverbio chino)*

*Cuando estás acertado, nadie lo recuerda.  
Cuando estás equivocado, nadie lo olvida.  
(Proverbio irlandés)*

*Empezar es la mitad de todo. (Proverbio griego)*

*Errar es humano. (Proverbio romano)*

*Cuatrocientos cincuenta y un grados Fahrenheit.  
La temperatura a la que el papel empieza a arder.  
(Ray Bradbury)*



Parte 1

Preguntas de examen



## Complejos

1. Calcular la forma cartesiana de  $z = i^{1999} + i^{2000}$ .
2. Calcular la forma cartesiana de  $z = \frac{(1+\sqrt{3}i)^3}{(\sqrt{3}+i)^2}$ .
3. Sea  $z = (1 - \alpha i)/(\alpha + 2i)$ . ¿Para qué valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$  se cumple que  $z$  es real?
4. Sea  $z = (1 + \alpha i)/(1 - \alpha i)$ . ¿Para qué valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$  se cumple que  $\text{Arg } z = \pi/4$ ?
5. Sea  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $z/8 = i/z^2$ ,  $\text{Re } z < 0$  e  $\text{Im } z > 0$ . Calcular la forma cartesiana de  $z$ .
6. Calcular todos los números complejos  $z$  tales que  $z/(2 - 3i) \in \mathbb{R}$ ,  $z^2 = -\frac{5}{4} - 3i$  y  $\text{Re } z > 0$ .
7. Calcular todos los números complejos  $z$  tales que  $|z| = |z^2| = |1 - z|$ . Calcular todos los números complejos  $w$  tales que  $|w| = |w^2| = |2 + w|$ .
8. Sea  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $z^4 = 16$ . Calcular todos los posibles valores de  $w = 2 + z + z^2 + z^3$ .
9. Sea  $z = e^{2\pi i/3}$ . Calcular  $w = 1 + z + z^2$ .
10. Sean  $a_0, \dots, a_{n-1}$  las partes reales de las raíces  $n$ -ésimas de la unidad. Calcular  $a_0 + \dots + a_{n-1}$ .
11. Sean  $z_0, \dots, z_5$  las raíces sextas de un número complejo  $z \in \mathbb{C}$ . Supongamos que  $z_0 = 2e^{\pi i/4}$ . Calcular la suma  $z_1 + \dots + z_5$ .
12. Calcular la suma de las raíces sextas de la unidad que tienen parte real negativa.
13. Sea  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $z^6 = -64$ ,  $\text{Re } z < 0$  e  $\text{Im } z < 0$ . Calcular  $z^4$ .
14. Sea  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $z^4 + 1 = 0$ ,  $\text{Re } z < 0$  e  $\text{Im } z < 0$ . Calcular  $w = (1 - i)^{12} z^{-1}$ .
15. Sea  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $z^4 = -16$ ,  $\text{Re } z > 0$  e  $\text{Im } z > 0$ . Calcular  $w = z/(1 + i)^6$ .
16. ¿En qué cuadrante está el número complejo  $(1000e^{3\pi i/4} + 1)^7$ ? Ídem con  $(20000e^{9\pi i/7} + 3)^{11}$ .
17. El lugar geométrico de los números complejos  $z$  tales que  $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = 4$  es una circunferencia. Calcular su centro y su radio.
18. ¿Cuáles de los números complejos  $1 + i$ ,  $-1 + i$ ,  $-1 - i$  y  $1 - i$  son raíces décimas de  $32i$ ?
19. Sea  $z = -(\alpha^2 + 1) + (\alpha^2 + 1)i$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Calcular los diferentes argumentos de  $\sqrt{z^3}$ .
20. Calcular todos los números complejos  $z$  tales que  $z^8 = 1$  y  $i(z + \bar{z})(z - \bar{z}) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
21. Calcular todos los números complejos  $z$  tales que  $|z| + z = 2 + i$ .

22. Calcular todas las parejas de números complejos  $z$  y  $w$  tales que  $\frac{z}{w} = 2$ ,  $|z| + |w| = 3$  y  $\text{Arg}(zw) = \pi/4$ .
23. Sea  $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$  un número complejo situado en el tercer cuadrante tal que el origen pertenece al segmento que une  $z^5$  con  $iz$ . Calcular  $\theta$ .
24. Sean  $z_\theta = i + e^{\theta i}$  y  $w_\varphi = 3 + i + 2e^{\varphi i}$ . ¿Cuántas parejas  $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$  existen tales que  $z_\theta = w_\varphi$ ?
25. Sean  $z$  y  $w$  dos números complejos no nulos. Entonces:
- Los puntos  $z$ ,  $w$ ,  $-z$  y  $-w$  forman un cuadrado si y sólo si  $z/w$  es imaginario puro.
  - Los puntos  $z$ ,  $w$  y  $0$  están alineados si y sólo si  $z/w$  es imaginario puro.
  - Los puntos  $z$ ,  $w$  y  $0$  están alineados si y sólo si  $z/w \in \mathbb{R}$ .
  - $z = 2w \Leftrightarrow \text{Im}(z/w) = 2|z/w|$ .
26. Calcular todos los puntos fijos de la función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = (z-1)^3/(z^2+z-1)$ .
27. Sean  $A = (0, 0)$ ,  $B = (2, 1)$  y  $C$  los vértices de un triángulo tal que  $\text{dist}(A, C) = \sqrt{2} \text{dist}(A, B)$  y el ángulo del vértice  $A$  es  $\pi/4$  radianes. Si  $C$  está en el primer cuadrante, calcular  $C$ .
28. ¿Para qué valor de  $\alpha \in \mathbb{R}$  forman un triángulo equilátero los puntos  $A = 2e^{5\pi i/2}$ ,  $B = 2$  y  $C = \alpha i$ ?
29. Sean  $w$  y  $v$  dos números complejos. Dado un triángulo cuyos vértices son  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , construimos el triángulo cuyos vértices son  $z_j^* = wz_j + v$  para  $j = 1, 2, 3$ . ¿Cuándo podemos asegurar que los dos triángulos tienen igual área?
30. Sean  $A = \{z \in \mathbb{C} : z^6 = -i\}$  y  $B = \{z \in \mathbb{C} : z^4 = -1\}$ . ¿Cuántos puntos hay en la intersección  $A \cap B$ ?

## Polinomios

1. Sea  $P(x) \in \mathbb{R}_2[x]$  tal que  $P(1) = 1$ ,  $P'(1) = -1$  y  $P(0) = 0$ . Calcular  $P''(0)$ .
2. Sea  $P(x) \in \mathbb{R}_3[x]$  tal que  $P(1) = 1$ ,  $P'(1) = 0$  y  $x^2 \mid P(x)$ . Calcular  $P''(1)$  y  $P'''(1)$ .
3. Sea  $P(x) \in \mathbb{R}_3[x]$  tal que  $P(0) = 0$ ,  $P(2) = 1$  y 1 es una raíz doble de  $P(x)$ . Calcular  $P(x)$ .
4. Sea  $P(x) \in \mathbb{R}_5[x]$  tal que  $P(1) = P'(1) = P'''(1) = P(2) = 0$ ,  $P''(1) = -8$  y  $P^{(5)}(1) = 120$ . Calcular  $P^{(4)}(1)$ .
5. Calcular todos los polinomios mónicos  $P(x) \in \mathbb{R}_3[x]$  tales que  $P(1) = 2$  y  $P(1+i) = 0$ .
6. Sea  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$  un polinomio mónico de grado tres tal que  $P(2+i) = 0$  y el resto de la división  $P(x)/(x-1)$  es igual a dos. Calcular la raíz real de  $P(x)$ .
7. Sean  $P(x), Q(x), C(x), R(x) \in \mathbb{R}[x]$  tales que  $P(x) = C(x)Q(x) + R(x)$  y  $\alpha$  es una raíz simple de  $P(x)$ ,  $Q(x)$  y  $C(x)$ . ¿Es  $\alpha$  una raíz de  $R(x)$ ? En caso afirmativo, ¿de qué multiplicidad?
8. Sean  $n, m \in \mathbb{Z}$  tales que  $n > 2m$ . Sean  $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$  de grado  $n$  y  $m$ , respectivamente. Calcular el resto de la división  $(P(x)^2 + Q(x)^2)/(P(x) - Q(x))$ .
9. Sea  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$  tal que  $x^2 - 4 \mid P(x) + x$  y  $x - 2 \mid P'(x) + 1$ . Calcular el resto de la división  $P(x)/(x-2)^2$ .
10. Sea  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$  tal que  $P(0) = P'(0) = 0$  y el resto de la división  $P(x)/(x-1)$  es 2. Calcular el resto de la división  $P(x)/(x^3 - x^2)$ .
11. Sea  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$  tal que los restos de las divisiones  $P(x)/(x-1)$ ,  $P(x)/(x-2)$  y  $P(x)/(x-3)$  son 3, 7 y 13, respectivamente. Calcular el resto de la división  $P(x)/(x-1)(x-2)(x-3)$ .
12. Sea  $P(x) = (n+1)x^{n+3} - (n+3)x^{n+2} + (n+3)x - (n+1)$ . Calcular el resto de la división  $P(x)/(x-1)^3$ .
13. Sea  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$  tal que el resto de la división  $P(x)/(x-2)^3$  es  $x^2 - x - 2$ . Calcular  $P(2)$ ,  $P'(2)$  y  $P''(2)$ . ¿Se puede calcular  $P'''(2)$ ?
14. Calcular el polinomio mónico de grado cinco  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$  tal que  $\text{gr}[\text{m.c.m.}[P(x), (x-1)^3]] = 7$  y tiene a  $z = i$  como raíz doble.
15. Calcular  $D(x) = \text{m.c.d.}[x^{30} - \alpha^{30}, x^6 - \alpha^6]$ .
16. Calcular  $D(x) = \text{m.c.d.}[x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2, x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2]$ .
17. Calcular  $D(x) = \text{m.c.d.}[x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 20x + 25, x^3 - 3x^2 + 7x - 5]$ .
18. Calcular  $D(x) = \text{m.c.d.}[ax^7 - 1, x^3 - x]$  en función del parámetro  $a$ .

19. Sean  $P(x) = x^6 + x^5 - x^3 + x - 1$ ,  $Q(x) = x^3 - x + 1$  y  $D(x) = \text{m.c.d.}[P(x), Q(x)]$ . Calcular unos polinomios  $P_1(x)$  y  $Q_1(x)$  tales que  $D(x) = P_1(x)P(x) + Q_1(x)Q(x)$ .
20. Sean  $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$  y  $Q(x) = x^3 + 2x^2 + \alpha x - 8$ . ¿Para qué valores de  $\alpha$  tienen  $P(x)$  y  $Q(x)$  una raíz común?
21. Sean  $P(x) = x^4 + x^3 + (\alpha + 2)x^2 + (\alpha + 1)x + 2$  y  $Q(x) = x^2 + x + \alpha$ . ¿Para qué valores de  $\alpha$  tienen  $P(x)$  y  $Q(x)$  dos raíces comunes?
22. Sean  $P(x) = x^4 + (7 - \alpha)x^2 - 7\alpha$  y  $Q(x) = x^2 - \alpha^{-1}$ , con  $\alpha \neq 0$ . ¿Para qué valores de  $\alpha$  tienen  $P(x)$  y  $Q(x)$  dos raíces comunes?
23. Sean  $P(x) = x^2 - \alpha x - 5$  y  $Q(x) = x^2 + \alpha x - 3$ . ¿Para qué valores de  $\alpha$  tienen  $P(x)$  y  $Q(x)$  alguna raíz común?
24. Sean  $P(x) = x^2 + (1 - \alpha)x - \alpha$  y  $Q(x) = x^3 + x^2 - 2x + \alpha$ . ¿Para qué valores de  $\alpha$  tienen  $P(x)$  y  $Q(x)$  alguna raíz común?
25. Sean  $P(x) = x^2 - (\alpha + 4)x + 3(\alpha + 1)$  y  $Q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ . ¿Para qué valores de  $\alpha$  tienen  $P(x)$  y  $Q(x)$  algún factor común?
26. Sean  $P(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$  y  $Q(x) = \alpha\beta x^2 - (\alpha + \beta)x + 1$ . ¿Para qué valores de  $\alpha$  y  $\beta$  tienen  $P(x)$  y  $Q(x)$  dos raíces comunes?
27. ¿Para qué valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  es  $x^6 + ax^2 + bx + c$  un múltiplo de  $(x + 1)^3$ ?
28. ¿Para qué valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  es  $x_0 = 1$  una raíz triple de  $x^5 + ax^4 + 4x^3 + bx^2 + cx + 2$ ?
29. Sea  $n > 1$ . Sea  $P(x) \in \mathbb{R}_{2n}[x]$  un polinomio mónico con una raíz real  $x_0$  de multiplicidad  $2n - 1$  tal que  $P(0) = 0$  y  $P'(0) = 1$ . Calcular  $x_0$ .
30. ¿Para qué valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$  es  $x_0 = 1$  una raíz triple de  $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + \alpha$ ?
31. ¿Cuándo tiene  $P(x) = x^3 - px + q$  alguna raíz múltiple?
32. ¿Cuándo tiene  $P(x) = x^3 + (3 - \alpha)x^2 - 4\alpha x$  alguna raíz múltiple?
33. ¿Cuándo tiene  $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + \alpha$  alguna raíz múltiple?
34. Sean  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  tres números reales diferentes tales que  $\alpha + \beta + \gamma = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 3$ . Sea  $P(x)$  el polinomio mónico de grado nueve que tiene a  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  como raíces triples. La derivada  $P'(x)$  tiene cuatro raíces dobles:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y otra que llamamos  $\delta$ . Calcular  $\delta$ .
35. ¿Cuándo forman las raíces de  $P(x) = x^3 - (2\alpha + 1)x^2 + (\alpha + 1)^2x - \alpha^2 - 1$  un triángulo rectángulo?
36. Calcular las raíces del polinomio  $P(x) = 3x^3 - 19x^2 + 36x - 10$ .
37. Calcular las raíces del polinomio  $P(x) = 5x^3 - 11x^2 + 27x - 5$ .
38. Calcular las raíces de  $P(x) = x^4 + x^2 + 1$ . ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
- El producto de las raíces contenidas en el semiplano  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$  es 1.
  - La media aritmética de las raíces es  $1/4$ .
  - Todas las raíces tienen la misma parte real.
  - Las raíces forman un rectángulo de lados  $\sqrt{3}$  y 1.

39. Sea  $z \in \mathbb{C}$  una solución de la ecuación  $x^4 - 2x^2 + 4 = 0$ . Entonces:
- La parte real de  $z$  es igual a cero.
  - La parte imaginaria de  $z$  es igual a cero.
  - La parte real de  $z^3$  es igual a cero.
  - La parte imaginaria de  $z^3$  es igual a cero.
  - $|z| = 2$ .
- Ídem con la ecuación  $x^4 + 2x^2 + 4 = 0$ .
40. ¿Cuántos polinomios reales mónicos e irreducibles dividen al polinomio  $x^{10} - 2x^5 + 1$ ?
41. Calcular todas las raíces reales del cociente  $C(x) = (x^6 - 64)/(x - 2)$ .
42. ¿Tiene el polinomio  $P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$  alguna raíz múltiple? En caso afirmativo, calcularlas todas.
43. ¿Para qué valor de  $\alpha$  vale tres la suma de las raíces de  $P(x) = 2x^4 + \alpha x^3 + 11x^2 - 14x - 10$ ?
44. Sea  $P(x) = x^5 + p_4x^4 + \dots + p_1x + p_0 \in \mathbb{R}[x]$  un polinomio tal que la suma de sus raíces vale uno, todas sus raíces tienen módulo uno y  $P(-1) \neq 0$ . Calcular  $p_4$  y  $p_0$ .
45. El polinomio  $P(x) = x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 20x + 25$  tiene un par de raíces complejas conjugadas dobles. Calcular esas raíces.
46. ¿Para qué valores de  $\alpha$  es una de las raíces de la ecuación  $x^2 + \alpha x + 12 = 0$  el triple de la otra raíz?
47. El polinomio  $P(x) = x^4 - 6x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0$  tiene dos raíces dobles, siendo una de ellas la mitad de la otra. Calcular sus raíces.
48. Sea  $z = re^{i\theta}$  un número complejo y sea  $P(x)$  el polinomio mónico de grado cuatro tal que sus cuatro raíces son  $z, -z, \bar{z}$  y  $-\bar{z}$ . Calcular  $P''(0)$ .
49. El polinomio  $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$  tiene unas raíces de la forma  $z_1 = a_1 + b_1i$  y  $z_2 = b_2i$ , con  $a_1, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$  y  $b_1, b_2 \neq 0$ . Calcular  $a_1$ .
50. Consideramos los polinomios  $x - 1, x - e^{2\pi i/5}, x^2 - 2 \cos(2\pi/5)x + 1, x^2 - 2 \sin(2\pi/5)x + 1$  y  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ ? ¿Cuál de ellos no divide a  $x^5 - 1$ ?
51. ¿Cuántas raíces reales tiene el polinomio  $P(x) = x^{12} - 3x^6 + 2$ ?
52. Factorizar el polinomio  $P(x) = x^4 + 1$  en  $\mathbb{R}$ .
53. Factorizar los polinomios  $P_{\pm}(x) = x^6 \pm 1$  en  $\mathbb{R}$ .
54. ¿Es irreducible el polinomio  $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$  en los complejos? ¿Y en los reales?
55. ¿Para qué valores de  $\alpha$  es compatible el sistema no lineal 
$$\left. \begin{aligned} x^3 - \alpha x^2 + \alpha x - 2 &= 0 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \end{aligned} \right\}?$$
56. Calcular todas las soluciones del sistema no lineal 
$$\left. \begin{aligned} x^2 - xy - 2x + 2y &= 0 \\ x^2 + xy - 3x - y &= -2 \end{aligned} \right\}.$$



## Matrices

1. ¿Para qué valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$  es igual a dos el rango de la matriz  $\begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 1 & \alpha^2 & 1 + \alpha^3 \\ 2 & 2 & 2 + 2\alpha \end{pmatrix}$ ?
  
2. Calcular  $r = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
  
3. Resolver el sistema  $\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = -1 \\ x + y + 3z = 4 \\ 5x - y + az = 10 \end{array} \right\}$  cuando sea indeterminado.
  
4. ¿Para qué valor de  $a$  es indeterminado el sistema  $\left. \begin{array}{l} ax + y + z = a \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a \end{array} \right\}$ ? Para ese valor, calcular la componente  $x$  de la solución tal que  $y = 1$  y  $z = 4$ .
  
5. ¿Cuándo es incompatible el sistema  $\left. \begin{array}{l} \alpha x + (\alpha - 3)y + z = 2 \\ \beta x + (2\beta + 5)y + 2z = 3 \end{array} \right\}$ ?
  
6. ¿Cuándo es compatible el sistema  $\left. \begin{array}{l} 2x - y = 1 - \alpha \\ x = 2\alpha \\ 3x + 4y = 5\alpha \end{array} \right\}$ ?
  
7. ¿Cuándo es compatible el sistema  $\left. \begin{array}{l} (-3 + \alpha)x - y = 2 \\ (1 + \alpha)x + \alpha y = 2 + \alpha \end{array} \right\}$ ?
  
8. Sea  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \alpha + 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  y  $b = \begin{pmatrix} 4 \\ \beta \\ 3 \end{pmatrix}$ . ¿Cuándo es compatible indeterminado  $Ax = b$ ?
  
9. Sea  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$  y  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -b_1 - b_2 \end{pmatrix}$ . ¿Para qué valores de  $\alpha$  y  $\beta$  es incompatible el sistema  $Ax = b$  para todos los valores  $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$ ?
  
10. Sea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -14 & 2 & 8 \end{pmatrix}$  y  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ . ¿Cuándo es compatible el sistema  $Ax = b$ ?

11. Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$  y  $b = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ \beta \\ 8 - \alpha - \beta \end{pmatrix}$ . Discutir el sistema  $Ax = b$ .
12. Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 2 - \alpha & 0 \\ 1 - \alpha & -2 + \alpha - \alpha^2 & 1 - 2\alpha \end{pmatrix}$  y  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\alpha - \alpha^2 \end{pmatrix}$ . Discutir  $Ax = b$ .
13. Sea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \lambda/2 \\ 4 & \lambda & 2 \\ 11 & 8 + \lambda & 2 + \lambda \end{pmatrix}$  y  $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ . Discutir el sistema  $Ax = b$ .
14. Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ . Discutir el sistema matricial  $AX = B$ .
15. Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha^2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Discutir el sistema matricial  $XA = B$ .
16. Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \beta \\ -1 & \beta & 0 \end{pmatrix}$ . Discutir el sistema matricial  $XA = B$ .  
Resolverlo cuando  $\alpha = -1$ .
17. Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ . Resolver el sistema matricial  $XA = B$ .
18. Sea  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Resolver el sistema matricial  $XA = B$ .
19. Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Resolver el sistema matricial  $XA = B$ .
20. Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m - 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} m & 1 \\ m + 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Resolver el sistema matricial  $AX = B$ .
21. ¿Cuándo es invertible la matriz  $\begin{pmatrix} 3 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 3 & 1 \\ \alpha & 3 & \alpha \end{pmatrix}$ ?
22. Invertir la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

23. Invertir la matriz  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & -1 \\ \beta & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
24. Invertir la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 2 & 3 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .
25. Calcular la inversa de  $A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1+\beta & 1 \\ 1 & 1 & 1+\gamma \end{pmatrix}$ .
26. Invertir la matriz  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  que tiene ceros en la diagonal y unos fuera de la diagonal.
27. Sean  $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$  y  $d = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$ . ¿Cuándo tienen alguna solución en común los sistemas  $Ax = b$  y  $Cx = d$ ?
28. Sean  $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$  y  $D = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ . ¿Cuándo tienen alguna solución en común los sistemas  $AX = B$  y  $XC = D$ ?
29. Sean  $A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$  y  $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ . ¿Cuándo es compatible determinado el sistema  $\left. \begin{array}{l} AX + BY = \mathbf{0} \\ CX + DY = \mathbf{0} \end{array} \right\}$ ?
30. ¿Qué columnas de la matriz  $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & 0 & 16 \\ 2 & 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}$  se pueden poner como una combinación lineal del resto?
31. Tenemos tres aleaciones. La primera contiene un 50% de oro, un 30% de plata y un 20% de platino. La segunda contiene un 30% de oro y un 70% de plata. La tercera contiene un 40% de oro, un 50% de plata y un 10% de platino. A partir de estas aleaciones creamos otra aleación que contiene un 45% de oro. ¿Qué proporción de plata tiene la nueva aleación?
32. En el cálculo  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  hay un error. ¿En qué columna de la última matriz está el error?
33. Sean  $A, B, C$  y  $D$  cuatro matrices tales que  $A + B = C$  y  $A - B = D$ . Calcular  $R = A^2 - B^2$  en función de  $C$  y  $D$ . (Nota: La respuesta no es  $R = CD$ .)
34. Sean  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ . ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
- Si  $A$  es simétrica, entonces  $A^k$  es simétrica para todo  $k \in \mathbb{N}$ .
  - Si  $A, B$  y  $AB$  son simétricas, entonces  $BA$  también.
  - Si  $A$  y  $B$  son simétricas, entonces  $AB$  y  $BA$  también.
  - Si  $A$  es simétrica e invertible, entonces  $A^k$  es simétrica para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .
  - Las matrices  $AA^T$  y  $A^T A$  siempre son simétricas.

35. Sean  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
- $\text{rango}(A + B) = \text{rango } A + \text{rango } B$ .
  - $\text{rango}(AB) = \min(\text{rango } A, \text{rango } B)$ .
  - $\text{rango}(AB) = \max(\text{rango } A, \text{rango } B)$ .
  - $\text{rango } B = n \Rightarrow \text{rango}(AB) = \text{rango } A$ .
  - $\text{rango } A = n \Rightarrow \text{rango}(AB) = n$ .
36. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
- Un sistema compatible indeterminado puede tener el mismo número de ecuaciones e incógnitas.
  - Un sistema de  $n + 1$  ecuaciones y  $n$  incógnitas tal que el rango de su matriz ampliada sea  $n + 1$  puede ser indeterminado.
  - Un sistema compatible determinado puede tener más incógnitas que ecuaciones.
  - Un sistema compatible determinado no puede tener más ecuaciones que incógnitas.
  - Un sistema homogéneo tal que el rango de la matriz de sus coeficientes es igual al número de incógnitas, puede ser indeterminado.
37. (Newton) Setenta y cinco bueyes consumen en doce días la hierba de un prado de sesenta áreas. Ochenta y un bueyes consumen en quince días la hierba de un prado de setenta y dos áreas. ¿Cuántos bueyes consumiran en dieciocho días la hierba de un prado de noventa y seis áreas? Se supone que los tres prados tienen la misma altura de hierba al entrar los bueyes, que la hierba crece de forma uniforme y que los bueyes comen de forma uniforme.

## Determinantes

1. Calcular el determinante de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix}$ .

2. Calcular el determinante de la matriz  $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$ .

3. Calcular el determinante de la matriz  $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x^2 \end{pmatrix}$ .

4. Calcular  $D = \begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & -x+y-z & 2y \\ 2z & 2z & -x-y+z \end{vmatrix}$ .

5. Calcular el determinante de la matriz  $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ .

6. Sea  $D_n$  el determinante de la matriz  $n \times n$  tal que sus elementos diagonales son  $\alpha$ , sus elementos subdiagonales son  $\beta$ , sus elementos superdiagonales son  $\gamma$  y el resto son nulos. Encontrar una relación entre  $D_n$ ,  $D_{n-1}$  y  $D_{n-2}$ .

7. Calcular  $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}$ .

8. Sean  $a, b, c, d \neq 0$ . Calcular la solución de la ecuación  $\begin{vmatrix} a+x & x & x & x \\ x & b+x & x & x \\ x & x & c+x & x \\ x & x & x & d+x \end{vmatrix} = 0$ .

9. Calcular el determinante del endomorfismo  $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  dado por  $f(A) = \alpha A + \beta A^\top$ .

10. Ídem con el endomorfismo  $f_{\pm} : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$  definido como  $f_{\pm}(P(x)) = xP'(x) \pm P(x)$ .
11. Ídem con el endomorfismo  $f : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$  definido como  $f(P(x)) = P(x + \alpha)$ .

## Espacios Vectoriales

1. ¿Es  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{Q}$ ? En caso afirmativo, ¿de qué dimensión?
2. ¿Para qué valores de  $\alpha$  y  $\beta$  es  $G = \{P(x) \in \mathbb{R}_2[x] : P(0) = \alpha \quad P'(0) = \beta\}$  un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}_2[x]$ ?
3. ¿Es  $F = \{P(x) \in \mathbb{R}_4[x] : \text{m.c.d.}[P(x), x^2 - 3x + 1] \neq 1\}$  un subespacio vectorial? En caso afirmativo, ¿de qué dimensión?
4. ¿Es  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \dim[(x, y, z), (z, y, x)] \leq 1\}$  un subespacio vectorial? En caso afirmativo, ¿de qué dimensión?
5. En el espacio vectorial  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  formado por las sucesiones de términos reales consideramos el subconjunto  $F = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E : x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 1 \quad \forall n \geq 1\}$ . ¿Es  $F$  un subespacio vectorial? En caso afirmativo, ¿de qué dimensión?
6. Sean  $v_1 = (1, 1, -1)$ ,  $v_2 = (2, 1, 0)$  y  $w = (-1, 0, \alpha + 1)$  tres vectores de  $\mathbb{R}^3$ . ¿Cuándo es  $F = \{u \in \mathbb{R}^3 : u + w \in [v_1, v_2]\}$  un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$ ?
7. Calcular la dimensión de  $F = \{P(x) \in \mathbb{R}_3[x] : P(0) = P(2) = 0\}$ .
8. Calcular la dimensión de  $F = \{P(x) \in \mathbb{R}_3[x] : P(\alpha) = P(2)\}$ , donde  $\alpha$  es una raíz del polinomio  $x^2 + x + 1$ .
9. Calcular la dimensión del subespacio vectorial de  $M_3(\mathbb{R})$  formado por aquellas matrices tales que los elementos de cada una de sus filas suman cero y los mismo con los elementos de las columnas.
10. Sea  $F = [(1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1), (3, 1, -1, -3)] \subset \mathbb{R}^4$ . ¿Existe algún subespacio vectorial  $G$  de  $\mathbb{R}^4$  tal que  $F \subsetneq G \subsetneq \mathbb{R}^4$ ?
11. Sea  $F$  el subespacio vectorial generado por los vectores  $u_1 = (1, 2, 3, 4)$ ,  $u_2 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $u_3 = (0, 1, 2, 0)$  y  $u_4 = (1, 2, 1, 4)$ . Calcular la dimensión, las ecuaciones y una base de  $F$ .
12. Sean  $u_1, u_2$  y  $u_3$  tres vectores li de  $\mathbb{R}^n$  y  $w = 3u_1 + 3u_2 + (\beta + 5)u_3$ . Sea  $F$  el subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$  generado por los vectores  $v_1 = u_1 + u_2 + 2u_3$ ,  $v_2 = u_1 - u_2$ ,  $v_3 = 2u_1 + 2u_3$  y  $v_4 = u_1 - u_2 + (1 - \alpha)u_3$ . ¿Para qué valores de  $\alpha$  y  $\beta$  se cumple que  $w \in F$ ?
13. ¿Para qué valores de  $\alpha$  y  $\beta$  forman los vectores  $u_1 = (3 + \beta, 6, 1 + \alpha)$  y  $u_2 = (1 - \beta, 2, 3 + 3\alpha)$  una base del subespacio  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - 3z = 0\}$ ?
14. Calcular  $d = \dim[(\alpha - 1, 1, \alpha + 1), (\alpha, \alpha, 1)]$ .
15. Calcular  $d = \dim[(1 + \alpha, 1 + \alpha, 2), (1, \alpha, 1), (0, 1 - \alpha, \alpha - 1)]$ .

16. Consideramos los subespacios vectoriales

$$F = \left\{ (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 : \begin{array}{l} 3x + 2y + z + 3t + 5u = 0 \\ 6x + 4y + 3z + 5t + 7u = 0 \end{array} \right\}$$

$$G = \left\{ (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 : \begin{array}{l} 9x + 2y + z + 7t + 9u = 0 \\ 3x + 2y + 4t + 8u = 0 \end{array} \right\}.$$

Calcular la dimensión de la suma  $F + G$ .

17. Sean  $F = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x, z \in \mathbb{R}\}$  y  $G = [(3, 2, 3), (1, 1, 1)]$ . Calcular las dimensiones de  $F$ ,  $G$ ,  $F \cap G$  y  $F + G$ .

18. Sean  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Calcular las dimensiones de los subespacios

$$F = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : AX = XB\} \quad G = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : AX = BX\}.$$

19. Sea  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  tal que  $\lambda_i \neq \lambda_j$  para todo  $i \neq j$ . Calcular la dimensión del subespacio vectorial  $F = \{X \in M_n(\mathbb{R}) : DX = XD\}$ .

20. Para cada pareja de matrices  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , definimos los subespacios vectoriales:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(A, B) &= \{X \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : AX = BX\} \\ \mathcal{G}(A, B) &= \{X \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : XA = XB\} \\ \mathcal{H}(A, B) &= \{X \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : AX = XB\}. \end{aligned}$$

Sea  $\mathcal{S}$  es subespacio vectorial de  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  formado por las matrices simétricas. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

- $\mathcal{F}(A, B) = \mathcal{F}(A - B, \mathbf{0})$ .
  - $\mathcal{G}(A, B) = \mathcal{G}(A - B, \mathbf{0})$ .
  - $\mathcal{H}(A, B) = \mathcal{H}(A - B, \mathbf{0})$ .
  - $\mathcal{F}(A, B) \cap \mathcal{S} = \mathcal{G}(A^\top, B^\top) \cap \mathcal{S}$ .
  - $\mathcal{H}(A, B) \cap \mathcal{S} = \mathcal{H}(B^\top, A^\top) \cap \mathcal{S}$ .
21. Calcular la dimensión de la intersección de los subespacios vectoriales

$$F = \{P(x) \in \mathbb{R}_5[x] : 1 \text{ es una raíz al menos triple de } P(x)\}$$

$$G = \{P(x) \in \mathbb{R}_5[x] : x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \mid P(x)\}.$$

22. Sean  $F$  y  $G$  dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial de dimensión finita  $E$ . Sea  $H$  un complementario de  $F \cap G$  en  $E$ . Sabiendo que  $\dim F = \dim G = 4$  y  $\dim(F + G) = 5$ , calcular la dimensión del espacio cociente  $E/H$ .

23. Sea  $F$  un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$  de dimensión  $d$  y sea

$$H = \{A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) : Av = 0 \text{ para todo } v \in F\}$$

un subespacio vectorial del espacio vectorial de matrices reales con  $m$  filas y  $n$  columnas. Calcular la dimensión de  $H$ .

24. Sea  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  una matriz de rango  $r$  y sean

$$F = \{X \in M_{n \times p}(\mathbb{R}) : AX = \mathbf{0}\} \quad G = \{Y \in M_{q \times m}(\mathbb{R}) : YA = \mathbf{0}\}.$$

Calcular las dimensiones de  $F$  y  $G$ .

25. ¿Son iguales los subespacios  $F = [(3, 1, 3, 2), (5, 3, 2, 3)]$  y  $G = [(1, 3, -5, 0), (7, 5, 1, 4)]$ ?

26. ¿Cuándo son iguales los subespacios  $F = [(-1, 5, 4), (\alpha, -2, -2)]$  y  $G = [(\beta, 3, 2), (5, 1, 0)]$ ?

27. Sean  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + 3z - 2t = 0\}$  y  $G = [(1, 1, 0, 1), (2, 2, -1, 2), (3, 4, 0, 2)]$ . Calcular  $F \cap G$ .
28. Sean  $F = [(4, -5, 2, 6), (2, -2, 1, 1)]$  y  $G = [(4, -1, 5, -2), (6, 2, 9, -13)]$ . Calcular la intersección.
29. Calcular una base de  $[(2, 1, -1), (1, 2, 2)] \cap [(-1, 0, 1), (3, 1, 1)]$ .
30. Sean  $F = [1 + x + \lambda x^2, 1 - x^3]$  y  $G = \{P(x) \in \mathbb{R}_3[x] : P(0) = 0 = P''(1)\}$ . ¿Para qué valor de  $\lambda \in \mathbb{R}$  se cumple que  $\dim(F \cap G) = 1$ ?
31. Dado un polinomio  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$ , calcular los únicos polinomios  $Q(x), R(x) \in \mathbb{R}_3[x]$  tales que  $P(x) = Q(x) + R(x)$ ,  $Q(1) = Q(-1) = 0$  y  $R(0) = R'(0) = 0$ .
32. Consideramos los subespacios vectoriales

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \alpha x + y + z + t = 0 = x + y + z + \alpha t\} \\ G &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + \alpha y + z + t = 0 = x + y + \alpha z + t\}. \end{aligned}$$

¿Cuándo son subespacios complementarios en  $\mathbb{R}^4$ ?

33. Sean  $F = [(1, \alpha, 0, 2), (1, 0, \alpha, -1)]$  y  $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \beta x + z = 0, \beta x - z - \beta t = 0\}$ . ¿Cuándo son subespacios complementarios en  $\mathbb{R}^4$ ?
34. Sean  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + t = 0, x + y + z = 0, 4x + \alpha y + 3z + t = 0\}$  y  $G = [(1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)]$ . ¿Cuándo son subespacios complementarios en  $\mathbb{R}^4$ ?
35. ¿Cuándo es directa la suma  $[x^4 - x^2 + 1, x^4 - x - 1] + [x^4 + 2x^2 + x, x^4 - 3x^2 + \alpha]$ ?
36. ¿Cuándo es directa la suma  $[(1, 0, 1, 2, 1), (-4, 1 - \alpha, 0, -1 - \alpha, 2)] + [(3, \alpha - 4, 1, \alpha + 2, 0)]$ ?
37. ¿Cuándo es directa la suma  $[(1, -2, 0, \alpha), (0, 1, 2, 5)] + [(-1, 3, 1, 1), (0, 2, 5, 2)]$ ?
38. Sean  $F = [(1, \alpha, 0, 1), (2, 1 + 2\alpha, 1, 1)]$  y  $G = \{(x, y, z, t) : x - y + z + t = 0 = y + 2z + t\}$ . ¿Cuándo es directa la suma  $F + G$ ?
39. Sean  $V = (v_1, \dots, v_n)$  y  $W = (w_1, \dots, w_n)$  dos bases de un espacio vectorial  $E$ . Sean  $(x_1, \dots, x_n)^\top$  e  $(y_1, \dots, y_n)^\top$  las coordenadas de un vector no nulo  $u$  en las bases  $V$  y  $W$ , respectivamente. Entonces:
- Si  $x_j = y_j$  para todo  $j$ , entonces  $v_j = w_j$  para todo  $j$ .
  - Si  $x_j = y_j$  para todo  $j$ , entonces  $v_j = w_j$  para algún  $j$ .
  - Si  $x_j = y_j$  para todo  $j$ , entonces los vectores  $v_1 - w_1, \dots, v_n - w_n$  son ld.
  - Es imposible que  $x_j = y_j$  para todo  $j$ , aunque es posible que  $x_j = y_j$  para algún  $j$ .
  - $x_j \neq y_j$  para todo  $j$ .
40. Sean  $v = (1, 3)$  y  $w = (5, -1)$  dos vectores de  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $U = (u_1, u_2)$  una base de  $\mathbb{R}^2$  tal que  $\bar{v}_U = (-3, 5)^\top$  y  $\bar{w}_U = (2, -3)^\top$  y las componentes en la base natural de los vectores  $u_1$  y  $u_2$  son positivas. ¿Cuántas bases de este tipo hay?
41. Sabiendo que un vector  $v \in \mathbb{R}^2$  tiene coordenadas  $(1, \beta)^\top$  en la base  $U = ((1, 2), (4, -1))$  y coordenadas  $(6, \alpha)^\top$  en la base  $W = ((1, 1), (1, -1))$ , calcular  $\alpha$  y  $\beta$ .
42. Sean  $U = (u_1, u_2, u_3)$  y  $V = (v_1, v_2, v_3)$  las bases formadas por los vectores  $u_1 = (2, 1, 0)$ ,  $u_2 = (0, 1, 2)$ ,  $u_3 = (2, 0, 1)$ ,  $v_1 = (1, 1, -3)$ ,  $v_2 = (2, 1, -14)$  y  $v_3 = (1, 2, 4)$ . Sea  $w \in \mathbb{R}^3$  el

vector cuyas coordenadas en la base  $U$  son  $(-2, 3, 1)^\top$ . Calcular las coordenadas de  $w$  en la base  $V$ .

43. Sean  $v_1 = (1, 1, 2)$ ,  $v_2 = (2, 0, 3)$  y  $v_3 = (1, 1, 0)$  unos vectores de  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $U = (u_1, u_2, u_3)$  una base de  $\mathbb{R}^3$  tal que las coordenadas de esos vectores en la base  $U$  son  $(2, 1, 0)^\top$ ,  $(2, 0, 2)^\top$  y  $(1, 1, -2)^\top$ , respectivamente. Calcular los vectores de la base  $U$ .
44. Sean  $v_1 = (2, -1, 2)$ ,  $v_2 = (1, 0, 3)$ ,  $v_3 = (1, -1, 1)$ ,  $w_1 = (1, 0, 1)$ ,  $w_2 = (2, 3, 4)$  y  $w_3 = (1, 2, 2)$  vectores de  $\mathbb{R}^3$ . Calcular  $C_W^V$ , es decir, la matriz del cambio de base de  $V = (v_1, v_2, v_3)$  a  $W = (w_1, w_2, w_3)$ .
45. Calcular la ecuación de  $F = [(2, -1, 1), (1, 3, 2)]$  en la base de  $\mathbb{R}^3$  formada por  $u_1 = (2, 1, 0)$ ,  $u_2 = (-1, 1, 4)$  y  $u_3 = (1, 0, -1)$ .
46. Sea  $F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 - x_2 = 0\}$  y  $U = (u_1, u_2)$  una base de  $\mathbb{R}^2$  tal que  $u_1 = (1, 3)$ . ¿Para qué vectores  $u_2 \in \mathbb{R}^2$  se cumple que  $F = \{y_1 u_1 + y_2 u_2 : y_1 + 7y_2 = 0\}$ ?
47. Sea  $F = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathbb{R}_3[x] : a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0, a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0\}$  un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}_3[x]$ . Calcular sus ecuaciones en la base  $(1, 1 - x, 1 - x^2, 1 - x^3)$ .
48. Sea  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 = 2x + y\}$ . Sean  $v_1 = (1, \alpha, 1)$  y  $v_2 = (\alpha, 1, -1)$ . ¿Para qué valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$  es  $(v_1 + F, v_2 + F)$  una base de  $\mathbb{R}^3/F$ ?
49. Sean  $E = M_2(\mathbb{R})$ ,  $G = \{X \in E : X + X^\top = \text{Id}\}$  y  $F = [A]$  con  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Entonces:
- $G$  es un vector de  $E$ .
  - $G$  es un subespacio vectorial de  $E$ .
  - $G$  es un vector de  $E/F$ .
  - $G$  es un subespacio vectorial de  $E/F$ .
50. Sea  $F$  un subespacio vectorial de un espacio vectorial  $E$ . Sean  $u_1, u_2 \in E$ . Entonces, las clases  $u_1 + F$  y  $u_2 + F$  son li en  $E/F$  si y sólo si:
- $u_1$  y  $u_2$  son li.
  - $u_1$  y  $u_2$  son li y  $u_1, u_2 \notin F$ .
  - $u_1$  y  $u_2$  son li y  $u_1, u_2 \in F$ .
  - $u_1 \neq u_2$ ,  $u_1 \notin F$  y  $u_2 \notin F$ .
  - $u_1$  y  $u_2$  son li y el subespacio  $[u_1, u_2]$  está incluido en un complementario de  $F$  en  $E$ .
51. Sean  $u, v$  y  $w$  tres vectores li de un ev. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas?
- Si  $F = [u, v, w]$  y  $G = [u + v, v + w]$ , entonces  $\dim F/G = 1$ .
  - Los vectores  $u - v$ ,  $v - w$  y  $w - u$  son li.
  - Los vectores  $u$ ,  $u + v$  y  $u + w$  son li.
  - Los vectores  $u + v$ ,  $v + w$  y  $w + u$  son li.
  - $\dim[u, v] = 2$ .
52. Sean  $P_1(x) = 7 + 2x + x^2 - 3x^3$ ,  $P_2(x) = 7 - 2x + x^2 - 3x^3$  y  $P_3(x) = 7 + x^2 - 3x^3$  polinomios de  $E = \mathbb{R}_3[x]$  y sea  $F = \{P(x) \in \mathbb{R}_3[x] : P(0) = P''(0) = P'''(0) = 0\}$ . Calcular la dimensión del subespacio  $G = [P_1(x) + F, P_2(x) + F, P_3(x) + F]$  del espacio cociente  $E/F$ .
53. Sean  $M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  y  $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Sea

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a + d = 0 = b \right\}$$

un subespacio del espacio vectorial  $E = M_2(\mathbb{R})$ . Sean  $G = [M_1 + F, M_2 + F]$  y  $H = [M_3 + F]$  dos subespacios del espacio cociente  $E/F$ . ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

- a.  $G = H$ .
  - b.  $E/F = G \oplus H$ .
  - c.  $E/F = G + H$ , pero la suma no es directa.
  - d.  $E/F \neq G + H$ .
54. Sea  $N = (e_1, e_2, e_3)$  la base natural de  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$  y  $v = (1, 1, 2)$ . Calcular las coordenadas de la clase  $v + F$  en la base  $(e_1 + F, e_2 + F)$  del espacio cociente  $\mathbb{R}^3/F$ .
55. En el espacio vectorial  $M_2(\mathbb{R})$  consideramos los subespacios vectoriales
- $$\mathcal{D} = \{M \in M_2(\mathbb{R}) : M \text{ es diagonal}\} \quad \mathcal{S} = \{M \in M_2(\mathbb{R}) : M \text{ es simétrica}\}.$$
- Calcular una base del espacio cociente  $\mathcal{S}/\mathcal{D}$ .
56. Sea  $F$  y  $G$  dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial  $E$  tales que  $\dim E = 7$ ,  $\dim F = 5$  y  $\dim G = 4$ . Dar una cota inferior de la dimensión de  $F \cap G$ .
57. Sean  $F$ ,  $G$  y  $H$  tres subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^3$  de dimensión dos tales que  $F \cap G \cap H = \{0\}$ . ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
- a. La suma  $F + G + H$  es directa.
  - b. Es posible que dos de los subespacios coincidan.
  - c.  $\dim(F \cap G) = \dim(G \cap H) = \dim(F \cap H) = 1$ , pero la suma  $(F \cap G) + (G \cap H) + (F \cap H)$  no es directa.
  - d.  $(F \cap G) \oplus (G \cap H) \oplus (F \cap H) = \mathbb{R}^3$ .
58. Sean  $F$ ,  $G$  y  $H$  tres subespacios vectoriales de un espacio vectorial. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
- a.  $F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$ .
  - b.  $F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H)$ .
  - c.  $F + (G \cap H) \subset (F \cap G) + (F \cap H) + (G \cap H)$ .
  - d.  $\dim[F + (G \cap H)] = \dim(F \cap G) + \dim(F \cap H) + \dim(F \cap G \cap H)$ .
  - e.  $((F + G) \cap H) + (F \cap H) = ((F + G) \cap H) + (G \cap H)$ .
59. Sean  $F$  y  $G$  dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial  $E$  tales que  $\dim F = \dim G = 3$  y  $\dim E = 5$ . ¿En cuáles de las siguientes situaciones se cumple que para todo  $u \in E$  existen unos vectores  $v \in F$  y  $w \in G$  tales que  $u = v + w$ ?
- a. Siempre, aunque los vectores  $v$  y  $w$  pueden no ser únicos.
  - b. Cuando  $\dim(F \cap G) = 1$ .
  - c. Cuando  $\dim(F \cap G) = 2$ .
  - d. Cuando  $E = F + G$ , en cuyo caso los vectores  $v$  y  $w$  son únicos.
60. Sean  $F$  y  $G$  dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial  $E$  de dimensión finita tales que  $\dim F + \dim G > \dim E$ . ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
- a.  $F + G = E$ .
  - b.  $F \subsetneq F + G$  o  $G \subsetneq F + G$ .
  - c. La suma  $F + G$  no es directa.
  - d. Existe un subespacio  $H$  que complementa simultáneamente a  $F$  y  $G$ .
61. Sea  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  una base de un espacio vectorial  $E$  y consideramos los vectores  $v_1 = u_1$ ,  $v_2 = u_1 - u_2$ ,  $v_3 = u_1 - u_2 + u_3$  y  $v_4 = u_1 - u_2 + u_3 - u_4$ . ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

- a.  $\dim[v_1, v_2, v_3] = 3$ .
  - b.  $[u_1, u_2, u_3] = [v_1, v_2, v_3]$ .
  - c. Los vectores  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$  generan  $E$ .
  - d. Los vectores  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$  son ld.
62. Sean  $u_1, u_2$  y  $u_3$  tres vectores de un espacio vectorial  $E$  tales que  $u_1 \neq \mathbf{0}$ ,  $u_2 \notin [u_1]$  y  $u_3 \notin [u_1, u_2]$ . ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
- a.  $u_1 \in [u_2, u_3]$  y  $u_2 \notin [u_1, u_3]$
  - b.  $u_1 \in [u_2, u_3]$  y  $u_2 \in [u_1, u_3]$
  - c.  $u_1 \notin [u_2, u_3]$  y  $u_2 \notin [u_1, u_3]$
  - d.  $u_1 \notin [u_2, u_3]$  y  $u_2 \in [u_1, u_3]$
63. ¿Existen algunos subespacios no nulos  $F, G$  y  $H$  de algún espacio vectorial de dimensión finita tales que  $\dim F + \dim G + \dim H + \dim(F \cap G \cap H) = \dim(F \cap G) + \dim(F \cap H) + \dim(G \cap H)$ ?

## Aplicaciones Lineales

- Sea  $f : E \rightarrow F$  una aplicación lineal y sean  $w_1, \dots, w_r$  vectores de  $E$ . Entonces:
  - $w_1, \dots, w_r$  son li  $\Rightarrow f(w_1), \dots, f(w_r)$  son li.
  - $w_1, \dots, w_r$  son ld  $\Rightarrow f(w_1), \dots, f(w_r)$  son ld.
  - $w_1, \dots, w_r$  son li  $\Rightarrow f(w_1), \dots, f(w_r)$  son ld.
  - $w_1, \dots, w_r$  son ld  $\Rightarrow f(w_1), \dots, f(w_r)$  son li.
- Sea  $f : M_\ell(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$  una aplicación lineal biyectiva. Determinar la relación entre  $\ell$  y  $n$ .
- ¿Para qué valores de  $n$  existe algún endomorfismo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\text{Nuc } f = \text{Im } f$ ? Para cada uno de los valores obtenidos, encontrar un ejemplo.
- Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación lineal. Entonces:
  - $n < m \Rightarrow f$  no es exhaustiva.
  - $n < m \Rightarrow f$  no es inyectiva.
  - $n \leq m \Rightarrow f$  es exhaustiva.
  - $n \leq m \Rightarrow f$  es inyectiva.
  - $n = m \Rightarrow f$  es biyectiva.
- Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una aplicación lineal. Entonces:
  - $f$  es exhaustiva.
  - $f$  es exhaustiva  $\Rightarrow \dim \text{Nuc } f = 2$ .
  - $\dim \text{Nuc } f = 2 \Rightarrow f$  no es exhaustiva.
  - $\dim \text{Nuc } f \neq 1 \Rightarrow f$  es exhaustiva.
- Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  unas aplicaciones lineales tales que  $n > m$ . Entonces:
  - La composición  $f \circ g$  no puede ser biyectiva.
  - La composición  $g \circ f$  no puede ser biyectiva.
- Sean  $f : E \rightarrow F$  y  $g : F \rightarrow E$  unas aplicaciones lineales tales que  $g \circ f : E \rightarrow E$  es biyectiva. ¿Qué se puede decir sobre la inyectividad y exhaustividad de las aplicaciones  $f$  y  $g$ ?
- Sean  $f : E \rightarrow F$  y  $g : F \rightarrow E$  unas aplicaciones lineales tales que  $(g \circ f)^2 = \text{Id}$ . ¿Qué se puede decir sobre la inyectividad y exhaustividad de las aplicaciones  $f$  y  $g$ ?
- Sean  $f, g : E \rightarrow E$  unos endomorfismos tales que  $g \circ f = \mathbf{0}$ . Entonces:
  - $\text{Im } f \subset \text{Nuc } g$ .
  - $\text{Im } g \subset \text{Nuc } f$ .
  - $\text{Nuc } f \subset \text{Im } g$ .
  - $\text{Nuc } g \subset \text{Im } f$ .
- Sean  $f, g : E \rightarrow E$  dos endomorfismos cualesquiera de un espacio vectorial  $E$ . ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
  - $f \circ g = \mathbf{0} \Rightarrow f = \mathbf{0} \circ g = \mathbf{0}$ .
  - $g \circ f = f \circ g$ .

- c.  $f$  biyectiva  $\Rightarrow (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f$ .  
d.  $f \circ g = -g \Rightarrow f = -\text{Id}$ .
11. Sean  $f : E \rightarrow F$  y  $g : F \rightarrow G$  dos aplicaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita. Entonces:
- $\dim[\text{Nuc}(g \circ f)] = \dim E - \dim \text{Im } g$ .
  - $\dim[\text{Im}(g \circ f)] = \dim E - \dim \text{Nuc } f$ .
  - $\dim[\text{Im } f \cap \text{Nuc } g] = \dim \text{Im } f - \dim \text{Nuc } g$ .
  - $\dim[\text{Im } f \cap \text{Nuc } g] = \dim \text{Im } f - \dim[\text{Im}(g \circ f)]$ .
12. Sean  $f, g : E \rightarrow E$  dos endomorfismos de un espacio vectorial de dimensión finita. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas?
- $\text{rango}(g \circ f) \leq \text{rango } g$ .
  - $\text{rango}(g \circ f) \leq \text{rango } f$ .
  - $f$  invertible  $\Rightarrow \text{rango}(g \circ f) = \text{rango } g$ .
  - $g$  invertible  $\Rightarrow \text{rango}(g \circ f) = \dim E$ .
  - $g \circ f = \mathbf{0} \Rightarrow \text{rango } f + \text{rango } g \leq \dim E$ .
13. Sean  $f, g : E \rightarrow E$  dos endomorfismos tales que  $f$  es biyectiva. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
- $\text{Nuc}(f \circ g) = \text{Nuc } g$ .
  - $\text{Nuc}(g \circ f) = \text{Nuc } g$ .
  - $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im } g$ .
  - $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g$ .
14. Sean  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  unas aplicaciones lineales tales que  $\dim \text{Nuc } f = 1$  y  $\dim[\text{Nuc}(g \circ f)] = 1$ . Calcular  $\dim \text{Nuc } g$ .
15. Sean  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$  y  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$  unas aplicaciones lineales no nulas tales que  $g \circ f = \mathbf{0}$  y  $\text{rango } g = 3$ . Calcular  $\dim \text{Nuc } f$ .
16. Sean  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  y  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  unas aplicaciones lineales tales que  $f$  es inyectiva y  $g \circ f = \mathbf{0}$ . Acotar superiormente el rango de  $g$ .
17. Sean  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  unas aplicaciones lineales tales que  $f$  es exhaustiva y  $g$  es inyectiva. Calcular el rango de la composición  $g \circ f$ .
18. Sean  $E$  y  $F$  dos espacios vectoriales de dimensión finita. Sea  $U = (u_1, \dots, u_n)$  una base de  $E$ . Sea  $f : E \rightarrow F$  una aplicación lineal tal que  $\text{Nuc } f = [u_1, \dots, u_r]$  para algún  $r < n$ . Entonces:
- Las imágenes  $f(u_{r+1}), \dots, f(u_n)$  son li.
  - Las imágenes  $f(u_{r+1}), \dots, f(u_n)$  son li pero no generan  $\text{Im } f$ .
  - Las imágenes  $f(u_{r+1}), \dots, f(u_n)$  generan  $\text{Im } f$  pero no son li.
  - Las imágenes  $f(u_{r+1}), \dots, f(u_n)$  son una base de  $F$  si la aplicación  $f$  es exhaustiva.
19. Sea  $f : E \rightarrow E$  un endomorfismo tal que  $f^2 + f + \text{Id} = \mathbf{0}$ . ¿Es  $f$  invertible? En caso afirmativo, expresar  $f^{-1}$  en función de las potencias  $f^0 = \text{Id}$  y  $f^1 = f$ .
20. Sea  $E$  un espacio vectorial de dimensión finita,  $F$  un subespacio vectorial de  $E$  y  $f \in \text{End}(E)$ . Entonces:
- $\text{Nuc } f \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \dim f(F) < \dim F$ .
  - $(\text{Im } f) \cap F \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \dim f(F) = \dim F$ .
  - $(\text{Nuc } f) \cap F \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \dim f(F) < \dim F$ .
  - $\dim f(F) = \dim F \Rightarrow f$  es inyectiva.

21. Sea  $E$  un espacio vectorial de dimensión finita y  $f \in \text{End}(E)$ . ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
- $\text{Nuc } f = \text{Nuc } f^2 \Rightarrow \text{Im } f = \text{Im } f^2$ .
  - $\text{Nuc } f \subset \text{Nuc } f^2$ .
  - $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$ .
  - $f^2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \text{Im } f \subset \text{Nuc } f$ .
  - Si  $\text{Nuc } f = \text{Nuc } f^3$  es posible que  $\text{Im } f \neq \text{Im } f^3$ .

22. Sea  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$  y  $E = \{f \in \text{End}(G) : \text{traza } f = 0\}$ . ¿Es  $E$  un espacio vectorial? En caso afirmativo, ¿de qué dimensión?

23. Sea  $G = [(2, -1)]$  y  $E = \{f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2) : \text{Im } f \subset G\}$ . ¿Es  $E$  un espacio vectorial? En caso afirmativo, ¿de qué dimensión?

24. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  el endomorfismo definido por  $f(x, y, z) = (\alpha x + y + z, x + \alpha y + z, x + y + \alpha z)$ . ¿Para qué valor de  $\alpha$  se cumple que  $\dim \text{Nuc } f = 1$ ?

25. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un endomorfismo tal que  $\text{Nuc } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + z = 0\}$ . Sean  $u = (1, -1, 2)$  y  $v = (-2, 2, \alpha)$ . ¿Para qué valor de  $\alpha$  se cumple que  $f(u) = f(v)$ ?

26. Sea  $u = (\alpha + 3, 5, 1)$  y  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  el endomorfismo cuya matriz en la base natural  $N$  es

$$M_N^N(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

¿Para qué valor de  $\alpha$  se cumple que  $u \in \text{Im } f$ ?

27. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  la aplicación dada por

$$f(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x + y & y + z \\ z + t & x + t \end{pmatrix}.$$

Calcular una base del espacio cociente  $\mathbb{R}^4 / \text{Nuc } f$ .

28. Sea  $U = (u_1, u_2, u_3)$  una base de un espacio vectorial  $E$  y  $f : E \rightarrow E$  un endomorfismo tal que los vectores  $f(u_1) = f(u_2)$  y  $f(u_3)$  son li. Calcular el núcleo de  $f$ .

29. Sea  $N = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base natural de  $\mathbb{R}^4$ . ¿Cuántos endomorfismos  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tales que  $f(e_1) = e_2$ ,  $f(e_3) = e_4$  y  $f^2 = f$  existen? Calcular el núcleo y la imagen de cada uno.

30. Sea  $U = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$  una base de  $\mathbb{R}^5$ . ¿Cuántos endomorfismos  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$  tales que  $u_1 - u_2 \in \text{Nuc } f$ ,  $f(u_1) = u_2 + u_4$ ,  $f(u_1 + u_3) = u_2$  y  $f(u_4) = f(u_2)$  existen? ¿Qué rango pueden tener esos endomorfismos?

31. Sean  $u_1 = (1, 0, 0)$ ,  $u_2 = (1, 0, 1)$ ,  $u_3 = (-1, 1, 0)$ ,  $u_4 = (1, 1, 1)$ ,  $v_1 = (1, 1, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1, 0)$ ,  $v_3 = (1, 2, 0)$  y  $v_4 = (2, 4, 1)$ . ¿Cuántos endomorfismos  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tales que  $f(u_j) = v_j$  para  $j = 1, 2, 3, 4$  existen? ¿Y cuántos tales que  $f(u_j) = v_j$  para  $j = 1, 2, 3$ ?

32. Sean  $u_1 = (1, 1, 0)$ ,  $u_2 = (0, -1, 1)$ ,  $u_3 = (1, 0, -1)$ ,  $v_1 = (1, -1, 0, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1, 2, -1)$  y  $v_3 = (-1, -1, -4, 2)$ . Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la aplicación lineal tal que  $f(u_j) = v_j$  para  $j = 1, 2, 3$ . Estudiar la inyectividad y exhaustividad de  $f$ .

33. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una aplicación lineal tal que

- $\text{Nuc } f = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 5x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 = 5x_1 + x_2 - 5x_4\}$ .
- $\text{Im } f = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1 + y_2 - y_3 = 0\}$ .

- $f(1, 2, 0, 1) = (1, 1, 2)$ .
  - Existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $f(0, 1, 2, 1) = (\lambda, \lambda + 1, \lambda)$ .
- Calcular  $f(3, -1, -3, 0)$ .

34. Sean  $u_1, u_2, u_3$  y  $u_4$  cuatro vectores de  $\mathbb{R}^4$  y sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  un endomorfismo tal que  $f(u_1) = u_3, f(u_2) = u_4$  y  $f^2 = f$ . Entonces:
- a. rango  $f = 2$ .
  - b.  $u_1, u_2$  li  $\Rightarrow u_3, u_4$  li.
  - c.  $u_3, u_4$  li  $\Rightarrow \dim \text{Nuc } f \leq 2$ .
  - d.  $\text{Nuc } f = [u_1 - u_3, u_2 - u_4]$ .
35. Sea  $N = (e_1, e_2, e_3)$  la base natural de  $\mathbb{R}^3$  y  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  el endomorfismo tal que  $f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_3$  y  $f^3 = \text{Id}$ . Calcular la matriz  $M_N^N(f)$ .
36. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  un endomorfismo tal que  $f^2 - 2f + 3\text{Id} = \mathbf{0}$ . Sean  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^4$  unos vectores tales que si  $u_3 = f(u_2)$  y  $u_4 = f(u_1)$  entonces  $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  es una base de  $\mathbb{R}^4$ . Calcular la matriz  $M_U^U(f)$ .
37. Sea  $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  el endomorfismo  $f(A) = A + A^\top$ . Sea  $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  la base de  $M_2(\mathbb{R})$  formada por  $v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Calcular la matriz  $M_V^V(f)$ .
38. Sea  $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  una base de un espacio vectorial  $E$  y  $f : E \rightarrow E$  el endomorfismo tal que

$$M_U^U(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & -a & a \\ 0 & b & 0 & b \\ 0 & b & 0 & b \\ a & 0 & -a & a \end{pmatrix} \quad a, b \neq 0.$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

- a.  $\det f = 0$ .
  - b.  $E = \text{Nuc } f \oplus \text{Im } f$ .
  - c.  $\text{Im } f = [u_1 + u_4, u_2 + u_3]$ .
  - d.  $f(u_1 + u_4) = 2a \cdot (u_1 + u_4) + b \cdot (u_2 + u_3)$ .
  - e.  $[u_1 + u_3, u_1 + u_2 - u_4] \subsetneq \text{Nuc } f$ .
39. Sea  $f : \mathbb{R}_{2n}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{2n}[x]$  el endomorfismo definido como  $f(P(x)) = P(x) + P(-x)$ . Calcular una base del núcleo y otra de la imagen de  $f$ .
40. Sea  $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  una aplicación lineal. Sea  $A$  la matriz de la aplicación  $f$  en la base natural de  $M_2(\mathbb{R})$ . Consideramos las siguientes propiedades del endomorfismo  $f$ .
- i. La imagen de la traspuesta de una matriz coincide con la imagen de la propia matriz:

$$f(e) = f(e^\top) \quad \forall e \in M_2(\mathbb{R}).$$

- ii. La imagen de cualquier matriz es una matriz simétrica:

$$f(e) = f(e)^\top \quad \forall e \in M_2(\mathbb{R}).$$

También consideramos las siguientes propiedades de la matriz  $A$ .

- a. La matriz  $A$  es simétrica.
- b. La matriz  $A$  es antisimétrica.
- c. La tercera columna de la matriz  $A$  es igual a su segunda columna.
- d. La tercera fila de la matriz  $A$  es igual a su segunda fila.

Relacionar las propiedades de ambas listas.

41. Sea  $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  un endomorfismo tal que el subespacio vectorial de  $M_2(\mathbb{R})$  formado por las matrices triangulares superior es invariante por  $f$ . Sea

$$A = M_N^N(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

la matriz de la aplicación  $f$  en la base natural de  $M_2(\mathbb{R})$ . ¿Qué elementos de la matriz  $A$  podemos afirmar que son nulos? Ídem en el caso triangular inferior. Ídem en el caso diagonal.

42. Sea  $f : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$  una aplicación lineal que conserva el grado de los polinomios; es decir, un polinomio y su imagen siempre tienen el mismo grado. Sea

$$A = M_N^N(f) = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

la matriz de la aplicación  $f$  en la base natural  $N = (1, x, x^2, x^3)$  de  $\mathbb{R}_3[x]$ . ¿Qué elementos de la matriz  $A$  son nulos? ¿Cuáles son no nulos?

43. Sea  $f : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$  una aplicación lineal tal que

$$\begin{aligned} \text{Nuc } f &= \{P(x) \in \mathbb{R}_n[x] : P(-x) = P(x)\} \\ \text{Im } f &= \{P(x) \in \mathbb{R}_n[x] : P(-x) = -P(x)\}. \end{aligned}$$

Sea  $A = M_N^N(f)$  la matriz de la aplicación  $f$  en la base natural  $N = (1, x, \dots, x^n)$  de  $\mathbb{R}_n[x]$ . ¿Qué elementos de la matriz  $A$  podemos afirmar que son nulos?

44. Sea  $G = [(8, 1)]$  un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^2$  y  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la aplicación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2 + x_3, -x_1 + 4x_2 + x_3).$$

Calcular la anti-imagen  $f^{-1}(G)$ .

45. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación lineal definida por  $f(x, y) = (x - y, 2x, -y)$ . Sea  $W = (w_1, w_2)$  con  $w_1 = (1, 0)$  y  $w_2 = (1, 1)$  una base de  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $V = (v_1, v_2, v_3)$  con  $v_1 = (1, 1, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1, 0)$  y  $v_3 = (0, 1, 1)$  una base de  $\mathbb{R}^3$ . Calcular la matriz  $M_V^W(f)$ .
46. Sean  $U = (u_1, u_2)$  y  $V = (v_1, v_2)$  dos bases de  $\mathbb{R}^2$  tales que  $v_1 = 2 \cdot u_1 + u_2$  y  $v_2 = u_1 - 2 \cdot u_2$ . Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  el endomorfismo tal que  $f(u_1) = u_1 - 2 \cdot u_2$  y  $f(u_2) = u_2$ . Calcular  $M_V^V(f)$ .
47. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación lineal dada por  $f(x, y) = (x + y, x - y, 2x)$ . Sea  $B$  la matriz de  $f$  en la base de salida  $U = ((1, 1), (0, 1))$  y la base de llegada  $V = ((1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 1, 1))$ . Calcular  $B^T B$ .
48. Sea  $U = (u_1, u_2, u_3)$  con  $u_1 = (1, 0, 0)$ ,  $u_2 = (1, 1, 0)$  y  $u_3 = (0, 0, 2)$  una base de  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  el endomorfismo cuya matriz en la base  $U$  es

$$M_U^U(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcular  $f(0, -1, 4)$ .

49. Sea  $U = (u_1, u_2)$  y  $V = (v_1, v_2)$  las bases de  $\mathbb{R}^2$  formadas por los vectores  $u_1 = (1, 1)$ ,  $u_2 = (0, -1)$ ,  $v_1 = (0, 1)$  y  $v_2 = (-1, 0)$ . Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  el endomorfismo tal que

$$M_V^U(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular  $f(-1, 3)$ .

50. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  el endomorfismo tal que  $f(1, 1) = (0, -1)$  y  $f(-1, 2) = (3, 1)$ . ¿Es  $f$  invertible? En caso afirmativo, calcular  $f^{-1}(1, 1)$ .
51. Sea  $N = (e_1, e_2)$  la base natural de  $\mathbb{R}^2$  y sea  $U = (u_1, u_2)$  con  $u_1 = (1, 0)$  y  $u_2 = (1, 1)$  otra base de  $\mathbb{R}^2$ . Sean  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  los endomorfismos tales que

$$M_N^N(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad M_U^U(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular  $(g \circ f)(1, 1)$ .

52. Sean  $N = (e_1, e_2)$  la base natural de  $\mathbb{R}^2$  y sea  $U = (u_1, u_2)$  con  $u_1 = (1, 0)$  y  $u_2 = (1, 1)$  otra base de  $\mathbb{R}^2$ . Sean  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  los endomorfismos tales que

$$M_N^N(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad M_U^U(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular  $(f \circ g)^{-1}(1, 1)$ .

53. Sea  $N = (e_1, e_2)$  la base natural de  $\mathbb{R}^2$  y sean  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  los endomorfismos tales que
- $$f(0, 1) = (-1, 1) \quad f(1, 1) = (0, 1) \quad g(1, 0) = (0, 1) \quad (1, -1) \in \text{Nuc } g.$$

Calcular la matriz  $M_N^N(g \circ f)$ .

54. Sea  $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  el endomorfismo cuya matriz en la base  $(1, 1 - x, 1 - x + x^2/2)$  es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular los valores de  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $f(P(x)) = \alpha_0 P(x) + \alpha_1 P'(x) + \alpha_2 P''(x)$ .

55. Sean  $U = (u_1, \dots, u_n)$  y  $V = (v_1, \dots, v_n)$  dos bases de un espacio vectorial  $E$  y  $f : E \rightarrow E$  el endomorfismo tal que  $f(u_j) = v_j$  para  $j = 1, \dots, n$ . Sea  $\text{Id} : E \rightarrow E$  la aplicación identidad. ¿Cuales de las siguientes afirmaciones son ciertas?

- $M_V^U(\text{Id}) = C_V^U$ .
- $M_V^U(\text{Id}) = C_U^V$ .
- $M_V^U(f)$  es la matriz identidad.
- $M_U^V(f)$  es la matriz identidad.
- $M_V^U(\text{Id})$  es la matriz identidad.
- $M_U^U(\text{Id})$  es la matriz identidad.

56. Sea  $U = (u_1, u_2, u_3)$  una base de un espacio vectorial  $E$  y sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entre todos los endomorfismos  $f : E \rightarrow E$  que dejan invariantes a los subespacios vectoriales  $F = [u_1, u_2]$  y  $G = [u_2, u_3]$ , ¿cuántos hay tales que  $M_{(u_1, u_2)}(f|_F) = A$  y  $M_{(u_2, u_3)}(f|_G) = B$ ? ¿Y cuántos tales que  $M_{(u_1, u_2)}(f|_F) = B$  y  $M_{(u_2, u_3)}(f|_G) = A$ ?

57. Sea  $G = [(0, -1, 0), (1, 1, 1), (2, 0, 2)]$  un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  el endomorfismo cuya matriz en la base natural de  $\mathbb{R}^3$  es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & \beta \end{pmatrix}.$$

¿Para qué valores de  $\alpha$  y  $\beta$  es  $G$  invariante por  $f$ ?

58. Sea  $G = [(1, -1, 0), (\alpha, 0, 1)]$  un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  el endomorfismo cuya matriz en la base natural de  $\mathbb{R}^3$  es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

¿Para qué valor de  $\alpha$  es  $G$  invariante por  $f$ ?

59. Sea  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$  un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$  y  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un endomorfismo tal que  $f(1, 1, 1) = (\mu, 0, 0)$  y  $f$  deja fijos todos los vectores de  $G$ . Entonces:
- $\det f = \mu$ .
  - $f$  es biyectiva.
  - $f$  inyectiva  $\Leftrightarrow f(1, 1, 1) \neq (1, 0, 0)$ .
  - $f(1, 1, 1) \neq \mathbf{0} \Rightarrow f(1, 1, 1) = (\det f) \cdot (3, 0, 0)$ .



## Diagonalización

1. Sean  $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} -\beta & 1 + \alpha^2 \\ 1 & -(1 + \beta) \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . ¿Para qué valores de  $\alpha$  y  $\beta$  es  $v$  un VEP de las matrices  $A$  y  $B$  simultáneamente?
2. Calcular los VAPs del endomorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(5, -5) = (2, -1)$  y los vectores  $v_1 = (1, 2)$  y  $v_2 = (3, 1)$  son VEPs de  $f$ .
3. Calcular los VAPs y los VEPs del endomorfismo  $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  definido por

$$f(P(x)) = (x^2 + 3x + 2)P'(x) - 2xP(x).$$

4. Sea  $U = (u_1, u_2)$  con  $u_1 = (1, 2)$  y  $u_2 = (0, 1)$  una base de  $\mathbb{R}^2$ . Calcular los VAPs y los VEPs del endomorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$M_U^U(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. ¿Cuándo diagonaliza la matriz  $\begin{pmatrix} \alpha + 1 & 2\alpha + 1 \\ 2\alpha + 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$ ?
6. Sea  $E = C^\infty(\mathbb{R})$  el espacio vectorial de las funciones infinitamente derivables en la recta real,  $G = [e^{-t}, e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t]$  y  $f : E \rightarrow E$  el endomorfismo derivada (es decir, dada cualquier función  $x(t) \in E$  entonces  $f(x(t)) = \dot{x}(t)$  es su derivada). ¿Es invariante por  $f$  el subespacio vectorial  $G$ ? En caso afirmativo, ¿diagonaliza en los reales la restricción  $f|_G$ ?
7. ¿Cuándo diagonaliza la matriz  $\begin{pmatrix} 1 - \alpha & -\alpha & 2\alpha \\ \alpha & 1 + \alpha & -2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ?
8. ¿Cuándo diagonaliza la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ?
9. ¿Cuándo diagonaliza la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ ?
10. Sea  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$  y  $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  el endomorfismo definido por  $f(X) = AX - XA$ . ¿Cuándo diagonaliza  $f$ ?
11. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  el endomorfismo tal que  $f(1, 1) = (7, -8)$  y  $f(-1, 2) = (-4, 8)$ . ¿Diagonaliza  $f$ ? En caso afirmativo, calcular su forma diagonal  $D$ .

12. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  el endomorfismo tal que  $f(2, 1, 0) = (2, 2\alpha + 1, 0)$ ,  $f(1, 1, 1) = (1, \alpha + 1, 2)$  y  $f(2, 0, 1) = (2, 2\alpha, 2)$ . ¿Para qué valores de  $\alpha$  diagonaliza  $f$ ?

13. Sean  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  las aplicaciones lineales definidas por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, 2x_2 + x_3) \quad g(y_1, y_2) = (4y_1 + 2y_2, y_2, y_1 + y_2).$$

¿Diagonalizan las composiciones  $g \circ f$  y  $f \circ g$ ?

14. Sea  $\epsilon \in (0, 1)$  y  $A = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}$ . Calcular  $A^{\pm\infty} := \lim_{n \rightarrow \pm\infty} A^n$ .

15. Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Entonces:

- La matriz  $A$  siempre tiene algún VAP simple.
- La matriz  $A$  siempre tiene algún VAP complejo.
- La matriz  $A$  siempre tiene algún VAP negativo.
- La matriz  $A$  siempre tiene algún VAP nulo.
- La matriz  $A$  siempre tiene algún VAP positivo.

16. Tenemos dos matrices invertibles  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , un vector no nulo  $v \in \mathbb{R}^n$  y un escalar no nulo  $\lambda \in \mathbb{R}$  tales que  $Av = \lambda Bv$ . Entonces:

- $v$  es un VEP de VAP  $\lambda$  de la matriz  $A^{-1}B$ .
- $v$  es un VEP de VAP  $\lambda$  de la matriz  $BA^{-1}$ .
- $v$  es un VEP de VAP  $\lambda^{-1}$  de la matriz  $BA^{-1}$ .
- $v$  es un VEP de VAP  $\lambda$  de la matriz  $AB^{-1}$ .
- $v$  es un VEP de VAP  $\lambda$  de la matriz  $B^{-1}A$ .

17. Sea  $f : E \rightarrow E$  un endomorfismo invertible y  $v$  un VEP de VAP  $\lambda$  de  $f$ . Entonces:

- $f(v)$  es un VEP de VAP  $\lambda$  de  $f^{-1}$ .
- $f(v)$  es un VEP de VAP  $\lambda^{-1}$  de  $f$ .
- $f^{-1}(v)$  es un VEP de VAP  $\lambda$  de  $f$ .
- $f^{-1}(v)$  es un VEP de VAP  $\lambda^{-1}$  de  $f$ .

18. Sean  $A$  y  $B$  dos matrices de  $M_n(\mathbb{R})$ . ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

- $A$  diagonalizable  $\Leftrightarrow A - \text{Id}$  diagonalizable.
- $1 \in \sigma(A) \Leftrightarrow A - \text{Id}$  no es invertible.
- $v$  VEP de VAP  $\lambda$  de la matriz  $BA$  y  $\det B \neq 0 \Rightarrow B^{-1}v$  VEP de VAP  $\lambda$  de la matriz  $AB$ .
- $A$  diagonalizable y  $B$  diagonal  $\Rightarrow A + B$  diagonalizable.
- $0 \in \sigma(AB) \Leftrightarrow 0 \in \sigma(BA)$ .

19. Sea  $A$  una matriz tal que  $v = (1, \dots, 1)$  es un VEP de VAP  $\lambda$  de la matriz  $A$ . Entonces:

- La suma de las columnas de la matriz  $A$  da cero.
- La suma de las filas de la matriz  $A$  da cero.
- La suma de las columnas de la matriz  $A - \lambda \cdot \text{Id}$  da cero.
- La suma de las filas de la matriz  $A - \lambda \cdot \text{Id}$  da cero.
- $\dim[\text{Nuc}(A - \lambda \cdot \text{Id})] = 1$ .

20. Expresar la potencia  $A^{10}$  en función de las potencias inferiores de  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

21. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  el endomorfismo definido por  $f(x, y, z) = (x - y + 7z, y - 8z, z)$ . Expresar la potencia sexta de  $f$  en función de sus potencias inferiores.
22. Sabiendo que el polinomio característico de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$  es  $Q_A(t) = -(t+1)^2(t-1)$ , calcular  $A^{50}$ .
23. Sea  $E$  un espacio vectorial y  $f \in \text{End}(E)$ . Sea  $u \in \text{Nuc}(f - \text{Id})^2$ . Expresar el vector  $u$  en función de  $f(u)$  y  $f^2(u)$ .
24. Sea  $A \in M_3(\mathbb{C})$  tal que  $\text{traza } A = 5$ ,  $\det A = 3$  y  $1 \in \sigma(A)$ . Calcular  $Q_A(t)$ .
25. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  un endomorfismo que tiene tres VEPs linealmente independientes del mismo VAP y tal que  $Q_f(t) = t^4 - 5t^3 + 9t^2 - 7t + 2$ . ¿Es  $f$  diagonalizable? En caso, afirmativo, calcular su forma diagonal.
26. Sea  $f : E \rightarrow E$  un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces:
- $0 \in \sigma(f) \Rightarrow E = \text{Nuc } f \oplus \text{Im } f$ .
  - $\dim E = 2 \Rightarrow E = \text{Nuc } f \oplus \text{Im } f$ .
  - $f$  diagonaliza  $\Rightarrow E = \text{Nuc } f \oplus \text{Im } f$ .
27. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  una aplicación lineal tal que  $\text{traza } f = 6$  y  $\dim[\text{Nuc}(f - 2 \cdot \text{Id})] = 2$ . Entonces:
- $f$  no diagonaliza  $\Rightarrow \text{rango } f = 4$ .
  - $f$  no diagonaliza  $\Rightarrow \text{rango } f = 3$ .
  - $\text{rango } f = 4 \Rightarrow f$  no diagonaliza.
  - $\text{rango } f = 3 \Rightarrow f$  no diagonaliza.
28. Sea  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$  una aplicación lineal tal que  $\dim[\text{Nuc}(f - 2 \cdot \text{Id})] = \dim[\text{Nuc}(f - 3 \cdot \text{Id})] = 2$ . ¿Para qué valores de la traza diagonaliza  $f$ ?
29. Sea  $E$  un espacio vectorial de dimensión finita y  $\pi : E \rightarrow E$  un endomorfismo tal que  $\pi^2 = \pi \neq \mathbf{0}, \text{Id}$ . ¿Diagonaliza  $\pi$ ? Calcular  $\sigma(\pi)$ .
30. Sea  $A \in M_2(\mathbb{R})$  tal que  $A \neq \mathbf{0}$  y  $A^2 = \mathbf{0}$ . ¿Cuándo diagonaliza la matriz  $A + 3 \cdot \text{Id}$ ?
31. Sea  $A \in M_2(\mathbb{C})$  tal que  $A^3 = \mathbf{0}$ . Entonces:
- $A^2 = \mathbf{0}$ .
  - $A^2 \neq \mathbf{0}$ .
  - $A$  diagonaliza  $\Leftrightarrow A^2 = \mathbf{0}$ .
  - $A$  no diagonaliza  $\Rightarrow A = \mathbf{0}$ .
  - $A \neq \mathbf{0} \Rightarrow A$  diagonaliza.
32. Sea  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $f : E \rightarrow E$  un endomorfismo tal que  $f^p = f$ . Entonces:
- $f$  es invertible.
  - $\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow f$  diagonaliza para todo  $p \geq 2$ .
  - $\mathbb{K} = \mathbb{R} \Rightarrow f$  no diagonaliza para ningún  $p \geq 2$ .
  - $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  y  $p$  par  $\Rightarrow f$  diagonaliza.
  - $p < n \Rightarrow f$  no diagonaliza.

33. Sea  $N = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base natural de  $\mathbb{R}^4$  y  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  un endomorfismo tal que  $e_2 + e_3 \in \text{Nuc}(f - 2 \cdot \text{Id})$ ,  $e_2 - e_3 \in \text{Nuc}(f - \text{Id})$ , el subespacio vectorial  $G = [e_1, e_4]$  es invariante por  $f$  y  $M_{(e_1, e_4)}(f|_G) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Calcular  $M_N^N(f)$ .
34. Sean  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dos aplicaciones lineales y  $f = g \circ h - \text{Id} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Entonces:
- traza  $f = -2 \Rightarrow \text{Nuc } f = \{\mathbf{0}\}$ .
  - traza  $f = -2 \Rightarrow f$  no diagonaliza.
  - traza  $f = 0 \Rightarrow f$  diagonaliza.
  - $\text{Im}(g \circ h)$  es un complementario de  $\text{Nuc } f$  en  $\mathbb{R}^3$ .
35. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un endomorfismo y sean  $G_1, G_2, G_3$  subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^3$  invariantes por  $f$  tales que  $\dim G_1 = \dim G_2 = \dim G_3 = 2$  y  $G_1 \cap G_2 \cap G_3 = \{\mathbf{0}\}$ . ¿Diagonaliza  $f$ ?

## Jordan

1. Sea  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^5)$  tal que su forma reducida de Jordan es  $J = \text{diag}(J_2(1), J_2(1), -1)$ . ¿Es invertible  $f$ ? En caso, afirmativo, expresar la potencia inversa  $f^{-1}$  en función de las potencias  $f^0 = \text{Id}$ ,  $f^1 = f$  y  $f^2 = f \circ f$ .
2. Sea  $E$  un espacio vectorial de dimensión cinco y sea  $f \in \text{End}(E)$ . Sean  $\lambda$  y  $\mu$  dos escalares diferentes tales que  $\lambda$  es un VAP de  $f$  y  $\dim[\text{Nuc}(f - \mu \cdot \text{Id})] = 3$ . Entonces:
  - a.  $\dim[\text{Nuc}(f - \lambda \cdot \text{Id})] = 2$ .
  - b. Si  $\dim[\text{Nuc}(f - \lambda \cdot \text{Id})] = 2$ , entonces  $f$  diagonaliza.
  - c. Si  $\dim[\text{Nuc}(f - \mu \cdot \text{Id})^2] = 4$ , entonces  $f$  diagonaliza.
  - d.  $E = \text{Nuc}(f - \lambda \cdot \text{Id}) \oplus \text{Nuc}(f - \mu \cdot \text{Id})$ .
  - e.  $f$  no diagonaliza.
3. Sean  $f, g : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$  dos endomorfismos equivalentes tales que  $Q_f(t) = Q_g(t) = (1-t)^3(4-t)^2$ ,  $\text{gr}[P_f(t)] = 3$  y  $\dim[\text{Nuc}(g - 4 \cdot \text{Id})] = 2$ . Calcular las formas reducidas de Jordan de  $f$  y  $g$ .
4. Sea  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$  un endomorfismo tal que  $Q_f(t) = -t(1-t)^3(2-t)$  y  $\text{gr}[P_f(t)] = 3$ . ¿Qué se puede decir sobre su diagonalización?
5. Sea  $U = (u_1, u_2, u_3)$  una base de  $\mathbb{R}^3$  y  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un endomorfismo tal que  $f \neq \text{Id}$ ,  $f(u_1) = u_1$ ,  $f(u_2) = u_2$  y  $f^2(u_3) = u_3$ . Calcular  $Q_f(t)$  y  $P_f(t)$ .
6. Sea  $E$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $f : E \rightarrow E$  un endomorfismo tal que  $f^2 = f$ . Entonces:
  - a. rango  $f = n$ .
  - b. rango  $f = \text{traza } f$ .
  - c. rango  $f = \det f$ .
  - d. rango  $f = 0$ .
7. Sean  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ . Determinar las potencias  $A^p$  y  $B^p$  para todo  $p \in \mathbb{Z}$ .
8. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  el endomorfismo definido por  $f(x, y) = (x, x + y)$  y  $n \geq 2$  un entero. Calcular una base de Jordan de la potencia  $f^n$ .
9. Sea  $f : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8$  un endomorfismo tal que  $Q_f(t) = t^3(t-1)^2(t-2)^3$  y  $P_f(t) = t^3(t-1)(t-2)^2$ . ¿Cuántos VEPs hay en cualquier base de Jordan de  $f$ ?
10. Sea  $f : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8$  un endomorfismo tal que  $\dim[\text{Nuc}(f - 2 \cdot \text{Id})] = 2$  y

$$Q_f(t) = (t+1)^3(t-2)^4(t-5) \quad P_f(t) = (t+1)^2(t-2)^2(t-5).$$

¿Cuántos VEPs hay en cualquier base de Jordan de  $f$ ?

11. Sea  $f : \mathbb{R}^{10} \rightarrow \mathbb{R}^{10}$  un endomorfismo tal que  $Q_f(t) = t^7(t-1)^3$ ,  $t^4 \nmid P_f(t)$ ,  $(t-1)^2 \nmid P_f(t)$  y  $\text{rango } f^2 = 5$ . ¿Cuántos VEPs hay en cualquier base de Jordan de  $f$ ?
12. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  un endomorfismo tal que  $P_f(t) = (t-1)(t+1)^2$  y  $\dim[\text{Nuc}(f + \text{Id})] = 1$ . Calcular las multiplicidades geométricas de los VAPs de  $f$ .
13. Sea  $E$  un espacio vectorial y  $f : E \rightarrow E$  un endomorfismo tal que  $Q_f(t) = (1-t)^3(-2-t)(5-t)$  y  $P_f(t) = (t-1)^2(t+2)(t-5)$ . ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
- $\text{Nuc}(f - \text{Id})^2 = \text{Nuc}(f - \text{Id})^3$ .
  - El subespacio vectorial  $\text{Nuc}(f - \text{Id})^3$  es invariante por  $f$ .
  - $\text{rango}(f - \text{Id})^2 = 2$ .
  - $\text{Nuc}(f - \text{Id}) \cap \text{Nuc}(f - \text{Id})^2 = \{\mathbf{0}\}$ .
  - La suma  $\text{Nuc}(f - \text{Id}) + \text{Nuc}(f + 2 \cdot \text{Id}) + \text{Nuc}(f - 5 \cdot \text{Id})$  es directa.
14. Sea  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  un endomorfismo tal que su único subespacio vectorial invariante de dimensión dos es  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x - y + z = 0\}$  y, además,  $u = (1, 1, 1) \in \text{Nuc}(f - \text{Id})^3$ . Entonces:
- $u \in \text{Nuc}(f - \text{Id})$ .
  - $u \in \text{Nuc}(f - \text{Id})^2$ .
  - $u \notin \text{Nuc}(f - \text{Id})^2$ .
15. Sea  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$  un endomorfismo tal que  $Q_f(t) = -(t-3)^2(t+2)^3$  y sea  $\kappa_1$  el número de sus subespacios invariantes de dimensión uno. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
- $P_f(t) = (t-3)^2(t+2)^3 \Rightarrow \dim \text{Nuc}(f - 3 \cdot \text{Id}) + \dim \text{Nuc}(f + 2 \cdot \text{Id}) > 2$ .
  - $P_f(t) = (t-3)(t+2) \Leftrightarrow \dim \text{Nuc}(f - 3 \cdot \text{Id}) = 2$  y  $\dim \text{Nuc}(f + 2 \cdot \text{Id}) = 3$ .
  - $\kappa_1 \geq 2$ .
  - $\dim \text{Nuc}(f - 3 \cdot \text{Id}) = 2 \Rightarrow \kappa_1 \geq 3$ .
16. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  un endomorfismo tal que  $Q_f(t) = t^4$ ,  $\dim \text{Nuc } f = 2$  y  $f^2 = \mathbf{0}$ . Calcular el número  $\kappa_j$  de subespacios invariantes por  $f$  de dimensión  $j = 1, 2, 3$ .
17. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  el endomorfismo cuya matriz en la base natural es  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Calcular el número  $\kappa_j$  de subespacios invariantes por  $f$  de dimensión  $j = 1, 2$ .
18. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  un endomorfismo tal que  $\dim \text{Nuc } f = 2$ . Entonces:
- $f^2 = \mathbf{0} \Rightarrow$  Existen al menos dos sev invariantes por  $f$  de dimensión tres.
  - $f^2 \neq \mathbf{0} \Rightarrow$  No existe ningún sev invariante por  $f$  de dimensión tres.
  - Cualquier base de Jordan de  $f$  tiene tres VEPs.
  - $f$  no diagonaliza
19. Sean  $F_1$  y  $F_2$  subespacios vectoriales complementarios de un espacio vectorial  $E$  de dimensión finita. Sea  $f : E \rightarrow E$  un endomorfismo tal que  $F_1$  y  $F_2$  son invariantes. Sean  $f_j$  la restricción de  $f$  al subespacio  $F_j$ , para  $j = 1, 2$ . ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
- $\det f = \det f_1 \cdot \det f_2$ .
  - $\text{traza } f = \text{traza } f_1 + \text{traza } f_2$ .
  - $\text{rango } f = \text{rango } f_1 + \text{rango } f_2$ .
  - $f$  es biyectiva si y sólo si lo son  $f_1$  y  $f_2$ .
  - $P_f(t) = P_{f_1}(t) \cdot P_{f_2}(t)$ .
  - $Q_f(t) = Q_{f_1}(t) \cdot Q_{f_2}(t)$ .

## Parte 2

# Problemas de examen



## Polinomios

1. Sea  $P(x) = p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n \in \mathbb{R}_n[x]$ . Probar las siguientes propiedades.
  - a) Si existe algún número  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $P(\alpha), P'(\alpha), \dots, P^{(n)}(\alpha) > 0$ , entonces  $P(x)$  no tiene ninguna raíz en el intervalo  $[\alpha, +\infty)$ .
  - b) Si existen unos números  $\beta, r > 0$  tales que el polinomio  $Q(x) = q_0 + q_1x + \dots + q_{n-1}x^{n-1}$  determinado por la relación  $P(x) = (x-\beta)Q(x) + r$  tiene todos sus coeficientes positivos, entonces  $P(x)$  no tiene ninguna raíz en el intervalo  $[\beta, +\infty)$ .
  - c) Si existe un número  $\gamma > 0$  tal que  $R(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_n$  no tiene ninguna raíz en el intervalo  $[\gamma, +\infty)$ , entonces  $P(x)$  no tiene ninguna raíz en el intervalo  $(0, 1/\gamma]$ .
  - d) Si existen unos números  $\delta_1 < \delta_2$  tales que  $S(x) = p_0 - p_1x + p_2x^2 - \dots + (-1)^n p_nx^n$  no tiene ninguna raíz en el intervalo  $[\delta_1, \delta_2]$ , entonces  $P(x)$  no tiene ninguna raíz en el intervalo  $[-\delta_2, -\delta_1]$ .

2. Sean  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  tres números reales fijados.

- a) Probar que existen unos únicos polinomios  $Q(x), R(x) \in \mathbb{R}_3[x]$  tales que

$$Q(-1) = \alpha \quad Q(0) = 1 = R(0) \quad Q'(0) = 0 = R'(0) \quad Q''(0) = 2\gamma = R''(0) \quad R(1) = \beta.$$

Calcular explícitamente los polinomios  $Q(x)$  y  $R(x)$  en función de  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ .

- b) Probar que existe un único polinomio  $P(x) \in \mathbb{R}_3[x]$  tal que

$$P(-2) = 0 \quad P'(-2) = 0 \quad P''(-2) = 0 \quad P(-1) = \alpha.$$

Calcular explícitamente el polinomio  $P(x)$  en función de  $\alpha$ .

- c) Análogamente, calcular el único polinomio  $S(x) \in \mathbb{R}_3[x]$  tal que

$$S(2) = 0 \quad S'(2) = 0 \quad S''(2) = 0 \quad S(1) = \beta.$$

- d) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida a trozos mediante las fórmulas

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{cuando } x \leq -2 \\ P(x), & \text{cuando } -2 \leq x \leq -1 \\ Q(x), & \text{cuando } -1 \leq x \leq 0 \\ R(x), & \text{cuando } 0 \leq x \leq 1 \\ S(x), & \text{cuando } 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{cuando } x \geq 2 \end{cases}$$

¿Cuándo  $f \in C^1(\mathbb{R})$ ? ¿Cuándo  $f \in C^2(\mathbb{R})$ ? ¿Cuándo  $f \in C^3(\mathbb{R})$ ? Especificar en cada caso los valores de  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ . para los cuales se cumplen esas condiciones.

- e) Dibujar la gráfica de la función  $f(x)$  para los valores de  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  tales que  $f \in C^2(\mathbb{R})$ . (Indicación: La función  $f(x)$  se llama *spline de campana*. El término campana hace referencia a la forma de su gráfica.)



## Espacios vectoriales

1. En el espacio vectorial  $\mathbb{R}_4[x]$  consideramos los subconjuntos

$$\begin{aligned} F &= \{P(x) \in \mathbb{R}_4[x] : P(1) = P'(1) = 0\} \\ G &= \{P(x) \in \mathbb{R}_4[x] : P(-1) = P'(-1) = 0\}. \end{aligned}$$

- a) Probar que  $F$  y  $G$  son subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}_4[x]$ .
- b) Calcular la dimensión y una base de cada uno de ellos.
- c) Calcular dimensiones y bases de  $F \cap G$  y  $F + G$ . ¿Son  $F$  y  $G$  complementarios en  $\mathbb{R}_4[x]$ ?
- d) Dado un número  $r$  (real o complejo), sea  $H_r = \{P(x) \in \mathbb{R}_4[x] : P(r) = P'(r) = 0\}$ .
  - i) ¿Existen números *reales* diferentes  $\alpha$  y  $\beta$  tales que  $\dim H_\alpha \cap H_\beta = 2$ ?
  - ii) ¿Existen números *reales* diferentes  $\alpha$  y  $\beta$  tales que  $\dim H_\alpha \cap H_\beta = 0$ ?
  - iii) ¿Existen números *complejos* diferentes  $z$  y  $w$  tales que  $H_z = H_w$ ?
  - iv) ¿Existen números *complejos* diferentes  $z$  y  $w$  tales que  $\dim H_z \cap H_w = 0$ ?

2. Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$  con  $\alpha \neq 0$ . Consideramos el subconjunto

$$\mathcal{Z}_A = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : XA = AX\}.$$

- a) Probar que  $\mathcal{Z}_A$  es un subespacio vectorial de  $M_2(\mathbb{R})$ .
  - b) Calcular la dimensión y una base de  $\mathcal{Z}_A$ .
3. En el espacio vectorial  $E = M_2(\mathbb{C})$  consideramos el subespacio vectorial

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E : \begin{array}{l} a + d = 0 \\ ia + b - c = 0 \end{array} \right\}.$$

- a) Calcular la dimensión y una base de  $F$ .
- b) Calcular un complementario  $G$  de  $F$  en  $E$ .
- c) Calcular una base de  $E/F$ .
- d) Calcular todas las matrices  $B \in M_2(\mathbb{R}) \subset E$  tales que  $B + F = \begin{pmatrix} 2 & 2 + 2i \\ 2 + 3i & 1 \end{pmatrix} + F$ .

4. En el espacio vectorial  $E = \mathbb{R}^4$  consideramos los siguientes subespacios vectoriales

$$\begin{aligned} F &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 + 2x_4 = 0\} \\ G &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_1 + x_3 = x_1 - x_4\}. \end{aligned}$$

- a) Calcular la dimensión y dar una base de cada subespacio.
- b) Probar que  $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$ .



## Aplicaciones lineales

1. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  el endomorfismo cuya matriz en la base natural es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcular una base del núcleo y otra de la imagen de  $f$ .
  - b) ¿Se cumple la igualdad  $\mathbb{R}^4 = \text{Nuc } f \oplus \text{Im } f$ ?
  - c) Sea  $G = \text{Nuc } f$ . Probar que  $U = (u_1, u_2)$  con  $u_1 = (0, 0, 1, -1) + G$  y  $u_2 = (0, 0, -2, 3) + G$  es una base del espacio cociente  $\mathbb{R}^4/G$ .
  - d) Calcular las coordenadas de la clase  $(1, 1, 1, 1) + G$  en la base  $U$ .
  - e) Sea  $\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4/G$  la aplicación lineal dada por  $\pi(x) = x + G$  y sea  $N$  la base natural de  $\mathbb{R}^4$ . Calcular la matriz  $M_U^N(\pi)$ .
2. Consideramos los subespacios vectoriales  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = y - 2z = 0\}$  y  $G = [(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (1, -3, -2)]$ .
- a) Calcular una base de cada uno.
  - b) Probar que  $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ . Calcular una base de  $\mathbb{R}^3$  formada por vectores de  $F$  y  $G$ .
  - c) Sea  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  el endomorfismo definido como sigue. Dado un vector  $u \in \mathbb{R}^3$ , sabemos que existen unos únicos vectores  $v \in F$  y  $w \in G$  tales que  $u = v + w$ . Entonces definimos

$$\pi(u) = w.$$

Probar que  $\pi$  es lineal y calcular la matriz de la aplicación  $\pi$  en la base anterior.

- d) Calcular la matriz de  $\pi$  en la base natural de  $\mathbb{R}^3$ .
  - e) Dado  $u = (-1, 1, 2)$ , calcular  $v \in F$  y  $w \in G$  tales que  $u = v + w$ .
3. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  un endomorfismo tal que

$$f(1, 1, 0, 0) = (0, 1, 0, -1) \quad f(1, 0, 1, 0) = (1, 1, 1, 0).$$

- a) Calcular la matriz de  $f$  en la base natural cuando  $f^2 = \text{Id}$ .
  - b) Calcular la matriz de  $f$  en la base natural cuando  $\text{Nuc } f = \text{Im } f$ .
4. Sea  $G = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : 3y_1 - y_2 = 0\}$  y  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la aplicación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = ((2 - \alpha)x_1 - 2x_2 + \alpha x_3, 2x_1 + (2\alpha - 6)x_2 + 2x_3).$$

- a) ¿Para qué valores de  $\alpha$  se cumple que  $f^{-1}(G) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 4x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0\}$ ?
- b) Para aquellos valores de  $\alpha$  en que sea posible, buscar una base  $V$  de  $\mathbb{R}^3$  y una base de llegada  $W$  de  $\mathbb{R}^2$  tales que

$$M_W^V(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Sea  $f : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  la aplicación dada por

$$f(P(x)) = \begin{pmatrix} P(1) & P'(1) \\ P''(1) & P'''(1) \end{pmatrix}$$

- Comprobar que  $f$  es lineal.
- Calcular la matriz de  $f$  en las bases naturales de  $\mathbb{R}_3[x]$  y  $M_2(\mathbb{R})$ .
- Explicar porqué es biyectiva la aplicación  $f$  y calcular la aplicación inversa  $f^{-1}$ .
- Determinar todas las matrices  $A \in M_2(\mathbb{R})$  tales que el polinomio  $f^{-1}(A) \in \mathbb{R}_3[x]$  tiene una raíz triple en  $x = 1$ .

6. Sean  $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  y  $g : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  las aplicaciones dadas por

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + (b+c)x^2 \quad g(P(x)) = P'(x).$$

- ¿Es  $f$  inyectiva? ¿Es  $g$  inyectiva?
- Calcular bases y dimensiones de  $\text{Im } f$  y  $\text{Nuc } g$ . Probar que  $\text{Nuc } g \subset \text{Im } f$ .
- Calcular las matrices de  $f$ ,  $g$  y  $g \circ f$  en las bases naturales de  $M_2(\mathbb{R})$  y  $\mathbb{R}_2[x]$ .
- Calcular la matriz de la composición  $g \circ f$  en la base de  $M_2(\mathbb{R})$  formada por las matrices

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y la base de  $\mathbb{R}_2[x]$  formada por los polinomios

$$P_1(x) = 1 + x + x^2 \quad P_2(x) = 1 + 2x + x^2 \quad P_3(x) = x^2.$$

- Encontrar una base de  $M_2(\mathbb{R})$  y otra base de  $\mathbb{R}_2[x]$  en las cuales la matriz de  $g \circ f$  sea

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Sean  $f, g : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  las aplicaciones lineales dadas por

$$f(P(x)) = \begin{pmatrix} P(0) & P(1) \\ P'(0) & P'(1) \end{pmatrix} \quad g(P(x)) = \begin{pmatrix} P(2) & P'(2) \\ P'(2) & P(2) \end{pmatrix}.$$

- Calcular las matrices de las aplicaciones  $f$  y  $g$  en las bases naturales de  $\mathbb{R}_3[x]$  y  $M_2(\mathbb{R})$ .
- Dar unas bases de  $\text{Nuc } f$ ,  $\text{Im } f$ ,  $\text{Nuc } g$  e  $\text{Im } g$ .
- Probar que  $f$  es invertible. Calcular la matriz de  $f^{-1}$  en las bases naturales de  $\mathbb{R}_3[x]$  y  $M_2(\mathbb{R})$ . Expresar los coeficientes de un polinomio arbitrario  $P(x) \in \mathbb{R}_3[x]$  en función de los valores  $P(0)$ ,  $P(1)$ ,  $P'(0)$  y  $P'(1)$ .
- Calcular la matriz de la composición  $g \circ f^{-1}$  en las bases naturales de  $\mathbb{R}_3[x]$  y  $M_2(\mathbb{R})$ . ¿Es biyectiva esta composición?

8. Consideramos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y - z + t + 4u = 0 \\ x + 6y - 2z + 3t = 0 \\ -y + 2z + u = 0 \\ x - y + 2z - t + 9u = 0 \end{array} \right\}.$$

- Calcular una base del subespacio vectorial  $F$  de  $\mathbb{R}^5$  formado por las soluciones del sistema.
- Definir una aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $F = \text{Nuc } f$ . Escribir la matriz la matriz de  $f$  en las bases naturales de  $\mathbb{R}^5$  y  $\mathbb{R}^3$ .
- Calcular una base de  $\text{Im } f$ . ¿Es  $f$  exhaustiva? ¿Y biyectiva?
- Calcular un complementario de  $F$  en  $\mathbb{R}^5$ .

9. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la aplicación lineal dada por

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y, x + y, x - y).$$

- a) Probar que  $f$  es inyectiva y calcular una base de  $F = \text{Im } f$ .  
 b) Sea  $A$  la matriz de  $f$  en las bases naturales de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^4$ . Calcular una base del subespacio vectorial  $G$  de  $\mathbb{R}^4$  dado por

$$G = \{v \in \mathbb{R}^4 : A^\top v = \mathbf{0}\}.$$

- c) Probar que  $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$ . Deducir que dado un vector  $u \in \mathbb{R}^4$  cualquiera, existen unos únicos vectores  $v \in G$  y  $w \in \mathbb{R}^3$  tales que  $u = f(w) + v$ .  
 d) Sea  $l : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación definida por

$$l(u) = w$$

donde  $w$  es el vector de  $\mathbb{R}^3$  asociado a  $u$  por el apartado anterior. Probar que  $l$  es lineal. Calcular  $\text{Nuc } l$  e  $\text{Im } l$ .

- e) Probar que dado un vector  $u \in \mathbb{R}^4$  cualquiera, el vector  $w = l(u)$  es la solución del sistema  $A^\top u = A^\top A w$ .

10. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  el endomorfismo lineal tal que:

- i) Los sev  $[(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)]$  y  $[(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1)]$  son invariantes por  $f$ .  
 ii)  $\text{Nuc } f = [(1, 1, 1, 1), (1, 1, -1, -1)]$ .  
 iii) La matriz de la restricción  $f|_F$  en la base  $((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$  es simétrica.  
 iv)  $f(0, 1, -1, 2) = (2, -2, 6, -6)$ .

Calcular la matriz de  $f$  en la base natural de  $\mathbb{R}^4$ .

11. Sea  $E$  un espacio vectorial de dimensión tres. Sea  $f : E \rightarrow E$  una aplicación lineal. Sea  $x \in E$  tal que  $f^2(x) \neq \mathbf{0}$ , pero  $f^3(x) = \mathbf{0}$ .

- a) Probar que  $(x, f(x), f^2(x))$  es una base de  $E$ .  
 b) Calcular la matriz de  $f$  en la base anterior.  
 c) Dar bases de  $\text{Nuc } f$  e  $\text{Im } f$ . ¿Es directa la suma  $\text{Nuc } f + \text{Im } f$ ?  
 d) Sea  $H$  el conjunto formado por los endomorfismos  $g : E \rightarrow E$  tales que  $g \circ f = f \circ g$ . Probar que  $H$  es un subespacio vectorial de  $\text{End}(E)$ . Calcular su dimensión y una base.  
 e) Probar que si  $g \in H$ ,  $g + g \circ f + g \circ f^2 \in H$ . Sea  $\phi : H \rightarrow H$  la aplicación dada por

$$\phi(g) = g + g \circ f + g \circ f^2.$$

Probar que  $\phi$  es lineal y biyectiva. Calcular la matriz de  $\phi$  en la base del apartado anterior.

12. Sea  $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  el endomorfismo lineal dado por

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 2b + 2c - 2d & 2a + b + c - d \\ -a - b + d & a + c \end{pmatrix}.$$

Sea  $F$  el subespacio vectorial de  $M_2(\mathbb{R})$  formado por las matrices  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  tales que

$$-2a + b - c + d = 0 \quad -b - c + d = 0 \quad 4a - b + 3c - 3d = 0.$$

- a) Calcular la matriz de  $f$  en la base natural de  $M_2(\mathbb{R})$ .  
 b) Probar que  $F$  es invariante por  $f$ .  
 c) Calcular una base de  $F$ . Calcular la matriz de la restricción  $f|_F$  en esa base.

13. Sea  $E$  un espacio vectorial de dimensión finita y  $f : E \rightarrow E$  un endomorfismo lineal.

- a) Probar que  $\text{Nuc } f^p \subset \text{Nuc } f^{p+1}$  y  $\text{Im } f^p \supset \text{Im } f^{p+1}$  para todo  $p \in \mathbb{N}$ .

b) Probar que existe un entero  $q \geq 0$  tal que

$$\begin{aligned} \text{Nuc } f \subsetneq \text{Nuc } f^2 \subsetneq \dots \subsetneq \text{Nuc } f^q = \text{Nuc } f^{q+1} = \text{Nuc } f^{q+2} \dots \\ \text{Im } f \supsetneq \text{Im } f^2 \supsetneq \dots \supsetneq \text{Im } f^q = \text{Im } f^{q+1} = \text{Im } f^{q+2} = \dots \end{aligned}$$

c) Probar que  $E = \text{Nuc } f^q \oplus \text{Im } f^q$ .

d) Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  el endomorfismo dado por

$$f(x, y, z) = (0, -x - 2y + 2z, -2x - 3y + 3z).$$

Calcular el entero  $q$  correspondiente a  $f$ . Encontrar los vectores  $v \in \text{Nuc } f^q$  y  $w \in \text{Im } f^q$  tales que  $(0, 1, 0) = v + w$ .

14. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  el endomorfismo lineal dado por

$$f(x, y, z, t) = (x - y - 2z + t, x - y - t, -2z + 2t, -2z + 2t).$$

a) Calcular la matriz de  $f$  en la base natural de  $\mathbb{R}^4$ .

b) Calcular unas bases de  $\text{Nuc } f$  e  $\text{Im } f$ . Calcular el rango de  $f$ .

c) Calcular  $f^2$ .

d) Sea  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  un endomorfismo cualquiera. Probar que

$$\text{Nuc } g = \text{Im } g \iff \begin{cases} g^2 = \mathbf{0} \\ \text{rango } g = 2 \end{cases}.$$

15. Sea  $E$  un espacio vectorial de dimensión finita y  $f, g : E \rightarrow E$  dos endomorfismos lineales tales que  $f \circ g = \mathbf{0}$ .

a) Probar que  $\text{Im } g \subset \text{Nuc } f$ .

b) Probar que si  $f + g$  es invertible, entonces  $\text{Im } g = \text{Nuc } f$ .

16. Sea  $f : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$  el endomorfismo cuya matriz en la base  $(1, x, x^2, x^3)$  de  $\mathbb{R}_3[x]$  es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular una base de  $\text{Nuc } f$ ,  $\text{Im } f$  y  $\mathbb{R}_3[x]/\text{Nuc } f$ .

b) Calcular la matriz de  $f$  en la base  $(x^3, x^2, x, 1)$ .

c) Probad que  $F = [1 + x, x^2 + x^3]$  y  $G = [2x + x^3, 1 + x^2]$  son invariantes por  $f$ .

d) Calcular las matrices de las restricciones  $f|_F$  en base  $(1 + x, x^2 + x^3)$  y  $f|_G$  en base  $(2x + x^3, 1 + x^2)$ .

e) Probar que  $(1 + x, x^2 + x^3, 2x + x^3, 1 + x^2)$  es una base de  $\mathbb{R}_3[x]$  y deducir usando el apartado anterior cuál es la matriz de  $f$  en esta base.

17. Sea  $f : \mathbb{R}_3[t] \rightarrow \mathbb{R}_3[t]$  el endomorfismo cuya matriz en la base  $(1, t, t^2, t^3)$  de  $\mathbb{R}_3[t]$  es

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sean  $F_1 = [1 + t, 1 - t^2]$ ,  $F_2 = [1 + t + t^2, t^3]$  y  $G = [t + t^2, 1 + t^3]$ .

a) Probar que  $F_1$  y  $F_2$  son complementarios en  $\mathbb{R}_3[t]$ .

b) Probar que  $F_1$  y  $F_2$  son invariantes por  $f$ .

c) Calcular  $F_1 \cap G$  y  $F_2 \cap G$ . ¿Son invariantes los subespacios  $G$ ,  $F_1 \cap G$  y  $F_2 \cap G$ ?

d) Sean ahora  $E$  un espacio vectorial de dimensión cuatro,  $F_1$ ,  $F_2$  y  $G$  unos subespacios vectoriales de  $E$  y  $f : E \rightarrow E$  un endomorfismo tales que  $F_1$  y  $F_2$  son complementarios

en  $E$  e invariantes por  $f$ ,  $\dim G = 2$  y  $\dim(F_1 \cap G) = \dim(F_2 \cap G) = 1$ . Probar que  $G$  es invariante por  $f$  si y sólo si también lo son las intersecciones  $F_1 \cap G$  y  $F_2 \cap G$ .



## Diagonalización

1. Consideramos la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Calcular el polinomio característico de  $A$ .
- Probar que  $A$  es diagonalizable.
- Encontrar una matriz diagonal  $D$  y una matriz invertible  $S$  tales que  $D = S^{-1}AS$ .
- Calcular  $A^5$ .

2. Consideramos la matriz  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . ¿Es diagonalizable? En caso afirmativo,

encontrar una matriz diagonal  $D$  y una matriz invertible  $S$  tales que  $D = S^{-1}AS$ .

3. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  el endomorfismo cuya matriz en la base natural de  $\mathbb{R}^4$  es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Calcular una base del núcleo de  $f$  y una base de la imagen de  $f$ . ¿Es  $f$  biyectiva?
- Encontrar una matriz diagonal  $D$  y una matriz invertible  $S$  tales que  $D = S^{-1}AS$ .
- Sea  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  otro endomorfismo tal que

$$\text{Nuc } g = \text{Im } f \quad \text{Im } g = \text{Nuc } f \quad \text{traza } g = \text{traza } f.$$

Calcular la matriz de  $g$  en la base natural de  $\mathbb{R}^4$ .

4. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  el endomorfismo cuya matriz en la base natural de  $\mathbb{R}^4$  es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Probar que el polinomio característico de  $f$  es  $Q_f(t) = t^4 + 2t^3 - 2t - 1$ .
- ¿Es diagonalizable el endomorfismo  $f$ ? En caso afirmativo, diagonalizar  $f$ .
- Probar que el subespacio vectorial

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$$

es invariante por  $f$ .

- Calcular la traza de la aplicación restricción  $f|_G$ .
- Calcular una base de  $G$  formada por vectores propios de  $f$ .

5. Sea  $E = \{P(x) \in \mathbb{R}_3[x] : P'(0) = 0\}$  y  $f$  la aplicación definida por

$$E \ni P(x) \xrightarrow{f} xP'(x).$$

- Probar que  $E$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}_3[x]$  y  $V = (1, x^2, x^3)$  es una base de  $E$ .
  - Probar que  $f$  es un endomorfismo de  $E$  y calcular  $M_V^V(f)$ .
  - Sea  $W = (1, 1 + x^2, 1 + x^2 + x^3)$ . Probar que  $W$  es otra base de  $E$  y calcular  $M_W^W(f)$ .
  - Calcular los VAPs y una base de VEPs de  $f$ .
  - Probar que  $E = \text{Nuc } f \oplus \text{Im } f$  y calcular un complementario de  $\text{Nuc } f$  en  $\mathbb{R}_3[x]$ .
6. Sea  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$  un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$  y  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  el endomorfismo cuya matriz en la base natural de  $\mathbb{R}^3$  es

$$A = \begin{pmatrix} \alpha + 6 & 1 & 2 \\ \alpha - 8 & 1 & -2 \\ -2\alpha - 20 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

- ¿Para qué valor de  $\alpha$  es el subespacio vectorial  $G$  invariante por el endomorfismo  $f$ ?
  - Para ese valor de  $\alpha$ , diagonalizar la restricción  $f|_G$ .
  - Para ese mismo valor de  $\alpha$ , calcular  $f^{117}(0, 0, 1)$ .
7. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un endomorfismo sin VAPs reales.
- Probar que los VAPs de  $f$  son simples y forman una pareja de números complejos conjugados:  $\sigma(f) = \{\lambda, \bar{\lambda}\} = \{a \pm bi\} = \{re^{\pm i\theta}\}$ .
  - Probar que si  $u \in \mathbb{C}^2$  es un VEP de VAP  $\lambda = a + bi = re^{i\theta}$  de  $f$ , entonces  $\bar{u}$  es un VEP de VAP  $\bar{\lambda} = a - bi = re^{-i\theta}$  de  $f$ .
  - Probar que  $B = (v, w)$  con  $v = u + \bar{u}$  y  $w = i(u - \bar{u})$  es una base de  $\mathbb{R}^2$ .
  - Probar que  $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .
8. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  el endomorfismo cuya matriz en la base natural de  $\mathbb{R}^4$  es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Probar que  $A$  tiene dos VAPs dobles complejos conjugados:
- ¿Diagonaliza  $f$  en los reales? ¿Por qué? ¿Diagonaliza  $f$  en los complejos? ¿Por qué?
- Encontrar dos VEPS linealmente independientes  $u_1, u_2 \in \mathbb{C}^4$  del mismo VAP.
- Sea  $(v_1, w_1, v_2, w_2)$  la base de  $\mathbb{R}^4$  tal que

$$u_1 = v_1 + iw_1, \quad u_2 = v_2 + iw_2.$$

Calcular la matriz de  $f$  en la base  $(v_1, w_1, v_2, w_2)$ .

- Dar tres subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^4$  de dimensión dos invariantes por  $f$ .
9. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  el endomorfismo cuya matriz en la base natural de  $\mathbb{R}^4$  es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Sea  $G = \text{Nuc}(f^2 + \text{Id})$ . Calcular la dimensión y una base del subespacio vectorial  $G$ . ¿Es  $G$  invariante por el endomorfismo  $f$ ? En caso afirmativo, calcular la matriz de la restricción  $f|_G$  en la base calculada anteriormente.
- Probar que  $f$  es invertible.

- c) Usar el Teorema de Cayley-Hamilton para escribir la inversa  $f^{-1}$  en función de las potencias  $f$ ,  $f^2$  y  $f^3$ .
- d) Estudiar la diagonalización de la matriz  $A$  sobre los reales y sobre los complejos.
10. Sea  $A_n$  la matriz cuadrada  $n \times n$  tal que sus elementos diagonales son iguales a cinco, sus elementos subdiagonales y superdiagonales son iguales a uno y el resto son cero.
- a) Probar que  $\det A_n = 5 \cdot \det A_{n-1} - \det A_{n-2}$  para todo  $n \geq 3$ .
- b) ¿Diagonalizan las matrices  $A_n$ ?
- c) Calcular los VAPs y VEPs de  $A_3$ .
- d) Probar que  $\sigma(A_n) \subset [3, 7]$  para todo  $n \geq 3$ .
11. Sea  $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  una base de un espacio vectorial  $E$  y  $f : E \rightarrow E$  el endomorfismo tal que:
- i) Los subespacios vectoriales  $F_1 = [v_1]$ ,  $F_2 = [v_1, v_2]$ ,  $F_3 = [v_1, v_2, v_3]$  y  $F_4 = [v_3, v_4]$  son invariantes por  $f$ .
- ii)  $f(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = 2v_1 + v_2 + 3v_3 + 2v_4$  y  $f(v_1 - v_2 + v_3 - v_4) = -v_2 + v_3 - 2v_4$ . Calcular la matriz  $M_V^V(f)$ . Calcular  $f^{-1}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4)$ . ¿Diagonaliza  $f$ ?
12. Sea  $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  una base de un espacio vectorial  $E$  y  $f : E \rightarrow E$  el endomorfismo tal que:
- i)  $f^3 + f^2 - f - \text{Id} = \mathbf{0}$ .
- ii) traza  $f = 0$ .
- iii)  $f$  es diagonalizable.
- iv) Los subespacios vectoriales  $F = [v_1, v_2]$  y  $G = [v_3, v_4]$  son invariantes por  $f$ .
- v)  $f(v_1) = v_2$  y  $f(v_3) = v_4$ .
- Entonces:
- a) Calcular el polinomio mínimo de  $f$
- b) Calcular el espectro de  $f$ .
- c) Calcular el polinomio característico de  $f$ .
- d) Calcular el polinomio característico de la restricción  $f|_F$ .
- e) Calcular la matriz  $M_V^V(f)$ .
13. Sean  $\alpha$  un número real y  $f : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$  una aplicación lineal tales que:
- i) Un polinomio y su imagen por  $f$  siempre tienen el mismo grado.
- ii) Si un polinomio es múltiplo de  $(x - \alpha)^k$  con  $k = 1, \dots, n$ , su imagen por  $f$  también.
- Probad que  $f$  es invertible y diagonaliza. Encontrad una base de VEPS de  $f$ .
14. Sea  $f : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$  el endomorfismo tal que:
- i) Un polinomio y su imagen por  $f$  siempre tienen el mismo grado.
- ii) Los subespacios  $F = [1 + x, 1 - x]$  y  $G = [x^2 + x^3, x^2 - x^3]$  son invariantes por  $f$ .
- iii)  $\text{traza}(f|_F) = \text{traza}(f|_G) = 0$ .
- iv) El polinomio  $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$  es un VEP de VAP  $\lambda = -1$  de  $f$ .
- Calcular la matriz de  $f$  en la base natural de  $\mathbb{R}_3[x]$ .
15. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  el endomorfismo tal que:
- i)  $\text{Nuc } f = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 = x_3 + x_4 = 0\}$ .
- ii) El subespacio vectorial  $F \cap G$  es invariante por  $f$ , donde
- $$F = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0)] \quad G = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 - x_3 = x_1 - x_2 = 0\}.$$
- iii)  $(0, 1, 0, 0)$  es un VEP de  $f$  de VAP  $-1$ .
- iv)  $\text{traza } f = 0$ .
- Entonces:
- a) ¿Diagonaliza  $f$ ? En caso afirmativo, diagonalizar  $f$ .

- b) Calcular la matriz de  $f$  en la base natural de  $\mathbb{R}^4$ .  
 c) Probar que existen unas bases  $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  y  $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  de  $\mathbb{R}^4$  tales que

$$M_V^U(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- d) Encontrar unas bases  $U$  y  $V$  cumpliendo la propiedad anterior. ¿Son únicas estas bases?

16. Sea  $f : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$  el endomorfismo dado por

$$f(P(x)) = 2P(x^2 + \alpha) - \beta x^4 P''(x)$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $P(x^2 + \alpha)$  es la substitución en  $P(x)$  de la variable  $x$  por  $x^2 + \alpha$ .

- a) ¿Para qué valores de  $\alpha$  y  $\beta$  es invariante el subespacio vectorial  $F = \mathbb{R}_2[x]$ ?  
 b) Para los valores obtenidos en el apartado anterior, considerar la restricción  $f|_F$ . ¿Cuándo es diagonalizable esa restricción?

17. En el espacio vectorial  $M_2(\mathbb{R})$  consideramos los siguientes subespacios vectoriales:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{X \in M_2(\mathbb{R}) : X \text{ es diagonal}\} \\ \mathcal{T} &= \{X \in M_2(\mathbb{R}) : \text{traza } X = 0\} \\ \mathcal{A} &= \{X \in M_2(\mathbb{R}) : X \text{ es antisimétrica}\}. \end{aligned}$$

- a) Sean  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Buscar dos matrices  $u_2, u_4 \in M_2(\mathbb{R})$  tales que

$$\mathcal{D} = [u_1, u_2] \quad \mathcal{T} = [u_2, u_3, u_4] \quad \mathcal{A} = [u_4].$$

- b) Probar que  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  es una base de  $M_2(\mathbb{R})$ .  
 c) Calcular las matrices en la base natural de  $M_2(\mathbb{R})$  de todos los endomorfismos lineales  $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  tales que:  
 i) Los subespacios  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{A}$  son invariantes por  $f$ .  
 ii)  $Q_f(t) = (t - 1)^4$ .  
 iii) La matriz  $u_1 + u_3$  es un vector propio de  $f$ .  
 iv)  $\det[f(u_1)] = -3$ .

18. Sea  $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  el endomorfismo dado por

$$f(X) = AX - XB \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcular la matriz de  $f$  en la base natural de  $M_2(\mathbb{R})$ .  
 b) Probar que  $f$  es diagonalizable. Calcular una base de VEPs de  $f$ .  
 c) Sean ahora  $A$  y  $B$  dos matrices cualesquiera de  $M_2(\mathbb{R})$  y sea  $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  el endomorfismo definido como antes. Probar que  $f$  tiene un VEP  $X \in M_2(\mathbb{R})$  de VAP  $\lambda = 0$  tal que  $\det X \neq 0$  si y sólo si las matrices  $A$  y  $B$  son equivalentes.

19. Sea  $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  el endomorfismo dado por

$$f(X) = AX - XB$$

donde  $A$  y  $B$  son dos matrices cualesquiera de  $M_n(\mathbb{R})$ .

- a) Probar que  $f$  es lineal.  
 b) Probar que las matrices  $B$  y  $B^\top$  tienen los mismos VAPs.  
 c) Sea  $u = (u_1, \dots, u_n)^\top$  un VEP de  $A$  de VAP  $\lambda$  y sea  $v = (v_1, \dots, v_n)^\top$  un VEP de  $B^\top$  de VAP  $\mu$ . Probar que la matriz  $uv^\top$  es un VEP de  $f$  de VAP  $\lambda - \mu$ .  
 d) Probar que si  $\sigma(A) \cap \sigma(B) \neq \emptyset$ , entonces  $f$  no es inyectiva.

e) Diagonalizar  $f$ , si es posible, cuando  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$ .

20. En el espacio vectorial  $M_3(\mathbb{R})$  consideramos los subespacios vectoriales:

$$\mathcal{S} = \{X \in M_3(\mathbb{R}) : X \text{ es simétrica}\}$$

$$\mathcal{A} = \{X \in M_3(\mathbb{R}) : X \text{ es antisimétrica}\}.$$

Sea  $f : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$  el endomorfismo dado por

$$f(X) = L^T X L \quad L = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \alpha \neq 0 \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

a) Probar que  $f$  es lineal.

b) Probar que los subespacios  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{A}$  son invariantes por  $f$ .

c) Dar una base del subespacio  $\mathcal{A}$  y calcular la matriz de la restricción  $f|_{\mathcal{A}}$  en esa base.

d) ¿Para qué valores de  $\alpha$  y  $\beta$  es  $\lambda = -1$  un VAP doble de la restricción  $f|_{\mathcal{A}}$ ? ¿Diagonaliza  $f|_{\mathcal{A}}$  para esos valores? En caso afirmativo, diagonalizar la restricción.

21. Sea  $u \in \mathbb{R}^n$  un vector unitario (es decir, de norma uno) y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  el endomorfismo definido por  $f(v) = v - 2\langle u, v \rangle u$ .

a) Calcular  $f^2$ .

b) Probar que  $f$  es diagonalizable. Calcular sus VAPs y VEPs.

(Se necesita usar el producto escalar y conocer la noción de ortogonalidad en  $\mathbb{R}^n$ .)



## Jordan

1. Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Calcular la forma reducida de Jordan  $J$  de  $A$ .
- Encontrar una matriz invertible  $S$  tal que  $J = S^{-1}AS$ .

2. Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Calcular su polinomio característico.
- Calcular su forma reducida de Jordan.
- Calcular una base de Jordan de  $A$ .
- Probar que  $A^{-1} = -A^2 + A + \text{Id}$ .
- Calcular  $A^n$ .

3. Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calcular su forma reducida de Jordan.
- Calcular su polinomio mínimo.
- Calcular una base de Jordan de  $A$ .
- Dar cuatro subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^4$  de dimensión dos que sean invariantes por  $A$  y tales que la restricción de  $A$  a cada uno de ellos no sea la aplicación nula.

4. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  el endomorfismo cuya matriz en la base natural de  $\mathbb{R}^4$  es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Calcular la forma reducida de Jordan de  $f$ .
- Calcular una base de Jordan de  $f$  y decir qué vectores de la base dada son VEPs de  $f$ .
- Probar que existen constantes  $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$  tales que

$$A^n = \alpha_n \text{Id} + \beta_n A \quad \forall n \geq 2.$$

Dar unas expresiones que permitan calcularlas recurrentemente.

5. Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Calcular la forma reducida de Jordan  $J$  de  $A$ .
- Calcular una base de Jordan de  $A$  y escribir la relación que hay entre  $A$  y  $J$ .
- Dar cinco subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^4$  de dimensión uno que sean invariantes por  $A$ .
- Probar que existen dos matrices  $B, C \in M_4(\mathbb{R})$  no nulas tales que

$$(B + \sqrt{2}C)^2 = A \quad BC = CB = \mathbf{0}.$$

(Sugerencia: Usar la forma reducida de Jordan de  $A$ .)

6. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \alpha \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- ¿Para qué valores de  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  son equivalentes las matrices  $A$  y  $B$ ?
- Encontrar, para esos valores, una matriz invertible  $S$  tal que  $B = S^{-1}AS$ .

7. Sea  $f : \mathbb{R}_4[x] \rightarrow \mathbb{R}_4[x]$  el endomorfismo cuya matriz en la base natural  $(1, x, x^2, x^3, x^4)$  es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Calcular la forma reducida de Jordan de  $f$ .
- Probar que existen constantes  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$  tales que

$$f^n = \alpha_n \text{Id} + \beta_n f + \gamma_n f^2 \quad \forall n \geq 3.$$

- ¿Cuántos VEPs hay en cualquier base de Jordan de  $f$ ?
- ¿Existe algún subespacio vectorial de  $\mathbb{R}_4[x]$  de dimensión tres tal que todos sus vectores sean VEPs de  $f$ ? En caso afirmativo, encontrar uno y decir si es el único posible.

8. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  el endomorfismo cuya matriz en la base natural de  $\mathbb{R}^4$  es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Calcular la forma reducida de Jordan  $J$  de  $f$ .
- Calcular una base de Jordan de  $f$  y escribir la relación que hay entre  $A$  y  $J$ .
- Dar tres subespacios vectoriales de dimensión uno, tres de dimensión dos y tres de dimensión tres, todos ellos invariantes por  $f$ .
- Razonar si la restricción de  $f$  a cada uno de los subespacios anteriores es diagonalizable.

9. Sea  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$  el endomorfismo cuya matriz en la base natural de  $\mathbb{R}^5$  es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Probar que  $Q_f(t) = (1-t)^3(2-t)^2$ .
  - Calcular la forma reducida de Jordan de  $f$ .
  - Calcular una base de Jordan de  $f$ .
  - Consideramos el subespacio vectorial  $G = [\text{Id}, A, A^2, A^3, A^4, A^5]$  del espacio vectorial  $M_5(\mathbb{R})$ . ¿Cuál es la dimensión de  $G$ ?
  - Encontrar cinco subespacios vectoriales de dimensión cuatro e invariantes por  $f$ .
10. Sea  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$  el endomorfismo cuya matriz en la base natural de  $\mathbb{R}^5$  es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calcular  $A^3$ . Deducir, sin calcular el determinante de la matriz  $A-t\cdot\text{Id}$ , que  $Q_f(t) = -t^5$ .
  - Calcular la forma reducida de Jordan de  $f$ .
  - Calcular una base de Jordan de  $f$ .
  - Encontrar un subespacio vectorial  $G$  de dimensión dos e invariante por  $f$  tal que la restricción  $f|_G$  sea nula.
11. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  el endomorfismo cuya matriz en la base natural es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Calcular  $A^p$ .
  - Dar cuatro subespacios vectoriales de dimensión dos invariantes por  $f$  y tales que la restricción de  $f$  a cada uno de ellos no diagonalice.
12. Consideramos las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Calcular sus polinomios característicos  $Q_1(t)$  y  $Q_2(t)$ .
- Calcular sus polinomios mínimos  $P_1(t)$  y  $P_2(t)$ .
- Calcular sus formas reducidas de Jordan  $J_1$  y  $J_2$ .
- Encontrar una base  $u = (u_1, u_2, u_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  que sea simultáneamente una base de Jordan de la matriz  $A_1$  y una base de Jordan de la matriz  $A_2$ . (Advertencia: Para hacer este apartado podría ser necesario cambiar el orden de los bloques de Jordan en  $J_2$ .)
- Probar que cualquier matriz invertible  $S$  tal que  $J_1 = S^{-1}A_1S$  y  $J_2 = S^{-1}A_2S$  es un múltiplo escalar de la matriz del cambio de base que pasa de la base  $u$  del apartado anterior a la base natural.

13. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  el endomorfismo cuya matriz en la base natural es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideramos los subespacios vectoriales  $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : z = t = 0\}$  y

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 2z - t = y - z + 2t = 0\}.$$

- Probar que  $\mathbb{R}^4 = G \oplus H$ . Probar que  $G$  y  $H$  son invariantes por  $f$ .
  - Encontrar una base  $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  de  $\mathbb{R}^4$  tal que  $G = [u_1, u_2]$  y  $H = [u_3, u_4]$ . Calcular la matriz del endomorfismo  $f$  en la base  $U$ .
  - Deducir, a partir del apartado anterior, la forma reducida de Jordan de  $f$ .
  - Encontrar una base de Jordan de  $f$ .
14. Sea  $f : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$  el endomorfismo definido por  $f(P(x)) = P(x - \alpha)$ , donde  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- Probar que los polinomios  $1, x - \alpha, (x - \alpha)^2, \dots, (x - \alpha)^n$  son linealmente independientes.
  - Probar que  $f$  es biyectiva.
  - Probar que  $G_n = \mathbb{R}_n[x]$  es un subespacio vectorial invariante por  $f$ .
  - Sea  $\alpha = 2$  y  $n = 3$ . Calcular la imagen y la anti-imagen del polinomio  $x^3 - x^2 + x - 1$ . Estudiar si la restricción  $f|_{G_3}$  diagonaliza. En caso negativo, dar su forma reducida de Jordan.
  - Sea  $\alpha \neq 0$  y  $n$  arbitrario. Estudiar si la restricción  $f|_{G_n}$  diagonaliza. En caso negativo, dar su forma reducida de Jordan.

15. Dada una matriz arbitraria  $A$  del espacio vectorial  $M_n(\mathbb{C})$ , consideramos el conjunto

$$\mathcal{Z}_A = \{X \in M_n(\mathbb{C}) : AX = XA\}.$$

- Probar que  $\mathcal{Z}_A$  es un subespacio vectorial de dimensión mayor o igual que uno.
- Sea  $J$  la forma reducida de Jordan de  $A$  y sea  $S$  una matriz invertible tal que  $J = S^{-1}AS$ . Probar que  $X \in \mathcal{Z}_A \Leftrightarrow S^{-1}XS \in \mathcal{Z}_J$ . Probar que la aplicación  $\phi : \mathcal{Z}_A \rightarrow \mathcal{Z}_J$  definida por

$$\phi(X) = S^{-1}XS$$

es biyectiva.

- Sean  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Sean  $J_A$  y  $J_B$  sus formas reducidas de Jordan. Calcular una base de  $\mathcal{Z}_{J_A}$  y otra de  $\mathcal{Z}_{J_B}$ . Calcular las dimensiones de  $\mathcal{Z}_A$  y  $\mathcal{Z}_B$ .
  - ¿Qué forma debe tener una matriz  $A \in M_2(\mathbb{C})$  para que  $\dim \mathcal{Z}_A > 2$ ?
16. Sean  $f, g : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  los endomorfismos dados por  $f(X) = AX$  y  $g(X) = XB$  donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calcular las matrices de  $f$  y  $g$  en la base natural de  $M_2(\mathbb{R})$ .
  - Calcular las formas reducidas de Jordan y unas bases de Jordan de  $f$  y  $g$ .
  - Encontrar el polinomio mónico de grado mínimo que anula simultáneamente a  $f$  y  $g$ .
  - Dar una base de un subespacio vectorial de  $M_2(\mathbb{R})$  de dimensión dos que sea invariante simultáneamente por  $f$  y  $g$ .
17. Consideramos las matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ .
- Calcular sus polinomios mínimos  $P_A(t)$  y  $P_B(t)$ .

- b) Sea  $F$  el conjunto de polinomios de  $\mathbb{R}[t]$  que anulan simultáneamente a las matrices  $A$  y  $B$ . Es decir,

$$F = \{P(t) \in \mathbb{R}[t] : P(A) = P(B) = \mathbf{0}\}.$$

Probar que  $F$  es un subespacio vectorial y calcular su dimensión.

- c) Encontrar el polinomio mónico  $P_0(t)$  de menor grado de  $F$  y probar que todos los polinomios de  $F$  son múltiplos de  $P_0(t)$ .
18. Consideramos los subespacios de  $\mathbb{R}_4[t]$  dados por

$$\begin{aligned} F &= \{P(t) \in \mathbb{R}_4[t] : P''(1) = P'''(1) = P^{(4)}(1) = 0\} \\ G &= \{P(t) \in \mathbb{R}_4[t] : P(1) = P'(1) = 0\}. \end{aligned}$$

- a) Calcular el polinomio  $B(t) \in F$  tal que  $B(0) = 10$  y  $B'(0) = 2$ .
- b) Sea  $H(t) = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix}$ . ¿Pertenece a  $F$  el polinomio  $H(t)$ ?
- c) Sea  $g \in \text{End}(G)$  tal que  $H(t)$  es su polinomio mínimo y sea  $(C(t), D(t), E(t))$  una base de Jordan de  $g$  tal que  $C(t)$  no es un VEP de  $g$ .
- 1) ¿Para qué valores de  $\lambda$  y  $\mu$  se cumple que  $g(C(t)) = \lambda C(t) + \mu D(t)$ ?
  - 2) Calcular dos subespacios vectoriales de  $G$  de dimensión dos invariantes por  $g$
- d) Sea  $f : \mathbb{R}_4[t] \rightarrow \mathbb{R}_4[t]$  un endomorfismo tal que
- i)  $F$  y  $G$  son invariantes por  $f$ .
  - ii)  $B(t)$  es un VEP de  $f$  de VAP cuatro.
  - iii) Las restricciones  $g = f|_G$  y  $f|_F$  no diagonalizan.
- Sea  $A(t) \in \mathbb{R}_4[t]$  un polinomio tal que  $(f - 4 \cdot \text{Id})A(t) = B(t)$ . Calcular la matriz de  $f$  en la base  $(A(t), B(t), C(t), D(t), E(t))$ .

19. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  el endomorfismo tal que

- i)  $(1, 0, 3) \in \text{Nuc } f$ .
- ii)  $(2, 1, 0) \in \text{Nuc}(f + 2 \cdot \text{Id})$ .
- iii)  $f(2, -1, 4) = (0, 3, -2)$ .

Sea  $F = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0\}$  y  $V = ((1, -1, 1), (3, 0, 1))$ .

- a) Calcular la matriz de  $f$  en la base natural de  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Probar que  $F$  es invariante por  $f$  y que  $V$  es una base de  $F$ .
- c) Probar que  $\mathbb{R}^3 = \text{Nuc } f \oplus F$ .
- d) Calcular la matriz de la restricción  $f|_F$  en la base  $V$ .
- e) Calcular la matriz reducida de Jordan y una base de Jordan de  $f|_F$ .

20. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  un endomorfismo tal que

- i)  $\text{Nuc } f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z = t = 0\}$ .
- ii)  $\text{Im } f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + 2z = t = 0\}$ .
- iii)  $P_f(t) = t^3$ .
- iv)  $f(1, -1, 0, 2) = (2, 1, 0, 0)$ .

Sea  $G = \text{Nuc } f$  y  $H = \text{Im } f$ .

- a) Encontrar una base de  $G \cap H$ .
- b) Probar que  $\text{Im } f^2 \subset G$ .
- c) Calcular la forma reducida de Jordan de  $f$ .
- d) Probar que  $(1, -1, 0, 2) \notin \text{Nuc } f^2$ .
- e) A partir de los apartados anteriores, se puede determinar una base de Jordan de  $f$  salvo un parámetro  $\alpha \in \mathbb{R}$  que queda indeterminado. Calcular esa base.
- f) ¿Para qué valor de ese parámetro  $\alpha$  se cumple que  $f(1, 0, 0, 0) = (0, 1, 1, 0)$ ?

21. En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^4$  consideramos los subespacios vectoriales:

$$\begin{aligned} F &= [(1, 0, 0, 0), (0, -2, 0, 1), (0, 0, 1, 0)] \\ G &= \{(x, y, x, t) \in \mathbb{R}^4 : y - z = y - t = 2x + z - t = 0\}. \end{aligned}$$

- Probar que  $F \oplus G = \mathbb{R}^4$ .
  - Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  un endomorfismo tal que
    - Los sevs  $F$  y  $G$  son invariantes por  $f$ .
    - La restricción  $f|_F$  tiene un único VAP.
    - $\text{Nuc } f = [(-1, 2, 1, -1)]$ .
    - El polinomio mínimo de la restricción  $f|_F$  tiene grado tres.
    - El polinomio mínimo de la restricción  $f|_G$  es  $P_G(t) = t + 1$ .
- Calcular la forma reducida de Jordan de  $f$ .

22. En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^4$  consideramos los subespacios vectoriales:

$$F = [(1, 1, 1, 0)] \quad G = \{(x, y, x, t) \in \mathbb{R}^4 : y = z = t\} \quad H = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)].$$

- Probar que  $\mathbb{R}^4 = F + G + H$ , pero que la suma no es directa. Probar que la suma de  $F$  y  $G + H$  es directa. Encontrar una base  $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  de  $\mathbb{R}^4$  tal que
 
$$u_1 \in F \quad u_3 \in G \cap H \quad G + H = [u_2, u_3, u_4].$$
- Calcular las matrices en la base natural de  $\mathbb{R}^4$  de todos los endomorfismos  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tales que:
  - Los subespacios  $F$ ,  $G$  y  $H$  son invariantes por  $f$ .
  - $\text{traza}(f|_F) = 3$ .
  - El polinomio mínimo de la restricción  $f|_G$  es  $(t - 2)^2$ .
  - $H \subset \text{Nuc}(f - 2 \cdot \text{Id})$ .

23. Sea  $E$  un espacio vectorial de dimensión finita y  $f : E \rightarrow E$  un endomorfismo tal que  $\text{Nuc } f = \text{Im } f$ .

- Sea  $n = \dim E$  y  $m = \dim \text{Nuc } f$ . Probar que  $n = 2m$ .
- Probar que  $f^2 = \mathbf{0}$ .
- Calcular  $P_f(t)$ ,  $Q_f(t)$  y la forma reducida de Jordan de  $f$ .
- Dada una base de Jordan  $U = (u_1, \dots, u_{2m})$  del endomorfismo  $f$ , consideramos la base  $V = (u_2, u_4, \dots, u_{2m}, u_1, u_3, \dots, u_{2m-1})$ . Calcular la matriz de  $f$  en la base  $V$ .

24. Sea  $f : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$  el endomorfismo cuya matriz en la base  $(1, x, x^2, x^3)$  de  $\mathbb{R}_3[x]$  es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Calcular el polinomio característico de  $f$ . Comprobar que  $f$  tiene dos VAPs dobles.
- Calcular la forma reducida de Jordan de  $f$ .
- Calcular una base de Jordan de  $f$ .
- Calcular el polinomio mínimo de  $f$ .
- Dar tres subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^4$  de dimensión dos que sean invariantes por  $f$ . Razonar si la restricción de  $f$  a cada uno de ellos es diagonalizable y/o invertible.
- ¿Existe algún  $\lambda \neq 0$  tal que los endomorfismos  $f$  y  $f - \lambda \cdot \text{Id}$  son equivalentes? En caso afirmativo, calcularlo. ¿Y algún  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que los endomorfismos  $f$  y  $\lambda \cdot \text{Id} - f$  son equivalentes? En caso afirmativo, calcularlo.

25. Sea  $f : \mathbb{R}_4[t] \rightarrow \mathbb{R}_4[t]$  el endomorfismo tal que

- $f(t) + t = \mathbf{0}$ .

- ii)  $f(1) + f(t) - 1 - t^2 = \mathbf{0}$ .
- iii)  $f(t^3 - t^4) = t^3 - t^4$ .
- iv)  $f(t^3 + t^4) = t^3 - 3t^4$ .
- v)  $t^2$  es un VEP de  $f$  de VAP  $-1$ .

Entonces:

- a) Calcular la matriz  $A = M_N^N(f)$  en la base natural  $N = (1, t, t^2, t^3, t^4)$ . Comprobar que  $A$  es una matriz triangular tal que  $\text{traza } A = -3$ .
- b) Calcular la forma reducida de Jordan y el polinomio mínimo de  $f$ .
- c) Calcular una base de Jordan de  $f$ .
- d) Encontrar un subespacio vectorial  $F$  de dimensión tres invariante por  $f$ , tal que  $f|_F$  sea diagonalizable pero sólo tenga un VAP.
- e) Sea  $G$  un subespacio vectorial no nulo invariante por  $f$  tal que  $f|_G = \text{Id}$ . Encontrar un complementario de  $G$  en  $\mathbb{R}_4[t]$ .

26. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  el endomorfismo cuya matriz en la base natural es  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

- a) Calcular el polinomio característico de  $f$ .
- b) Calcular la forma reducida de Jordan de  $f$ .
- c) ¿Cuántos VEPs hay en cualquier base de Jordan de  $f$ ? ¿Por qué?
- d) Calcular una base de Jordan de  $f$ .
- e) Calcular el polinomio mínimo de  $f$ .
- f) Consideramos el sev  $G = [\text{Id}, f, f^2, f^3, \dots]$  del ev  $\text{End}(\mathbb{R}^4)$ . Calcular la dimensión de  $G$ .
- g) Dar tres sevs de  $\mathbb{R}^4$  de dimensión tres que sean invariantes por  $f$ .
- h) Razonar si la restricción de  $f$  a cada uno de los sev dados en el apartado siete es diagonalizable.
- i) Razonar si la restricción de  $f$  a cada uno de los sev dados en el apartado siete es invertible.
- j) ¿Existe algún sev de  $\mathbb{R}^4$  de dimensión tres tal que todos sus vectores sean VEPs de  $f$ ? ¿Por qué? En caso afirmativo, encontrar uno.

27. Sean  $A$  y  $B$  dos matrices  $2 \times 2$  a coeficientes complejos. Probar que:

- a) Si  $AB - BA$  es invertible, entonces  $A$  y  $B$  no tienen VEPs comunes.
- b) Si  $A$  y  $B$  tienen los mismos VAPs y VEPs, entonces  $AB = BA$ .
- c)  $A^3 = \mathbf{0} \Rightarrow A^2 = \mathbf{0}$ .
- d)  $A^2 = B^2 = \mathbf{0} \Rightarrow (A + B)^{2n} = (AB)^n + (BA)^n$  para todo entero  $n \geq 1$ .