

SOLUCIONES DE ÁLGEBRA LINEAL (VERSIÓN 3.1, 07/09/02)

RAFAEL RAMÍREZ ROS

ÍNDICE

0.	Complejos	1
1.	Polinomios	2
2.	Espacios Vectoriales	3
3.	Matrices	6
4.	Aplicaciones Lineales	8
5.	Determinantes	12
6.	Diagonalización	13
7.	Jordan	16

0. COMPLEJOS

1. En forma exponencial (la polar se deduce fácilmente de la exponencial) queda:

$$\begin{aligned}
 i^{23} - 1 &= \sqrt{2} e^{i5\pi/4}, \\
 (1+i)^3 &= 2\sqrt{2} e^{i3\pi/4}, \\
 (1+\sqrt{3}i)^7 &= 128 e^{i\pi/3}, \\
 \frac{(\sqrt{3}+i)^5}{(1-i)^2} &= 16 e^{i4\pi/3}, \\
 \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^6}{(3-3\sqrt{3}i)^2} &= \frac{4}{81} e^{i5\pi/6}.
 \end{aligned}$$

2. Los resultados expresados en forma cartesiana (es decir, en forma binomial) son:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{i} &= \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \\
 1 - \sqrt[3]{i} &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - i/2, \quad 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - i/2, \quad 1 + i, \\
 e^{-i\pi/3} (1 - (1+i)^3) &= \frac{3 - 2\sqrt{3}}{2} - \frac{2 + 3\sqrt{3}}{2} i, \\
 \frac{(1+i)^{100}}{(1+\sqrt{3})^{50}} &= 1/2 + i\sqrt{3}/2, \\
 (1+\sqrt{3}i)^3 - (1-\sqrt{3}i)^3 &= 0.
 \end{aligned}$$

3. $a = -3/2$.
4. El cero y las seis raíces sextas de la unidad. Es decir, $z = 0$ y $z = e^{ik\pi/3}$ con $k = 0, \dots, 5$.
5. Un número complejo z cumple la ecuación $(z - \bar{z})^2 = i^2 z^2$ si y sólo si $\operatorname{Re} z = \pm\sqrt{3} \operatorname{Im} z$.
Obtenemos por tanto el par de rectas que pasan por el origen y forman un ángulo de $\pi/6$ radianes (es decir, treinta grados) con el eje real.

6. Hay dos soluciones:

$$z = \frac{3 + 5\sqrt{3}}{2} - \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i, \quad z = \frac{3 - 5\sqrt{3}}{2} - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i.$$

7. La suma da cero. De hecho, la suma de las n raíces n -enésimas de un número complejo siempre da cero.
8. Hay dos soluciones. La primera está formada por los números 2 y $1+i$. La segunda está formada por los números 2 y $1-i$.
9. $B = (4, 5)$ y $D = (0, 1)$.
10. Hay dos soluciones: $C = 2\sqrt{2}(1 + 2i)$ y $C = 2\sqrt{2}(2 - i)$.
11. Hay dos soluciones: $z = \pm 2\sqrt{2}i$.

1. POLINOMIOS

1. a) $P(2) = P'(2) = P''(2) = 0$ y $P'''(2) = 42 \neq 0$. Se deduce que $x = 2$ es una raíz triple del polinomio $P(x)$.
- b) $P(x) = (x - 2)^3(x^2 + x + 1)$ en $\mathbb{R}[x]$.
 $P(x) = (x - 2)^3 \left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ en $\mathbb{C}[x]$.
2. $\lambda = \mu = 2$.
3. Si $a = -4$, entonces $x = 1$ es una raíz doble. Si $a = 4$, entonces $x = -1$ es una raíz doble. No hay más posibilidades.
4. $P(x) = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!}$ no tiene raíces múltiples.
5. a) m.c.d. $[P(x), Q(x)] = x - 2$.
m.c.m. $[P(x), Q(x)] = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 8x + 4$.
 $P_1(x) = \frac{1}{3}$ y $Q_1(x) = -\frac{1}{3}(x + 1)$.
- b) m.c.d. $[P(x), Q(x)] = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$.
m.c.m. $[P(x), Q(x)] = x^6 - 6x^5 + 11x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 10x - 3$.
 $P_1(x) = \frac{1}{8}$ y $Q_1(x) = -\frac{1}{8}(x + 3)$.
- c) m.c.d. $[P(x), Q(x)] = 1$; es decir, los polinomios son primos.
m.c.m. $[P(x), Q(x)] = P(x) \cdot Q(x) = x^6 - 7x^5 + 12x^4 + 14x^3 - 59x^2 + 57x - 18$.
 $P_1(x) = \frac{1}{400}(61 - 17x)$ y $Q_1(x) = \frac{1}{400}(17x^3 + 24x^2 + x + 58)$.
6. a) $P'(x) = 3x^2 + 2x - 8 = 3(x + 2)(x - 4/3)$.
- b) La raíz común es $x = -2$. Además, $P(x) = (x + 2)^2(x - 3)$.
- c) m.c.d. $[P(x), P'(x)] = x + 2$.
- d) $P_1(x) = -\frac{9}{50}$ y $Q_1(x) = \frac{1}{50}(3x + 1)$.
7. a) $b^5 = a^3$.
- b) m.c.d. $[x^5 - a, x^3 - b] = x - a^{-1}b^2$.
m.c.m. $[x^5 - a, x^3 - b] = x^7 + a^{-1}b^2x^6 + a^{-2}b^4x^5 - ax^2 - b^2x - a^{-1}b^4$.
- c) m.c.d. $[x^5 - 32, x^3 - 8] = x - 2$.
m.c.m. $[x^5 - 32, x^3 - 8] = x^7 + 2x^6 + 4x^5 - 32x^2 - 64x - 128$.
8. $P(x) = 8 + 23(x - 1) + 33(x - 1)^2 + 25(x - 1)^3 + 9(x - 1)^4 + (x - 1)^5$. El resto de dividir $P(x)$ entre $Q(x) = (x - 1)^3$ es $R(x) = 8 + 23(x - 1) + 33(x - 1)^2$.
9. a) El resto de dividir $P(x) = x^{2n} - nx^{n+1} - 3x + 2$ entre $Q(x) = (x - 1)^2$ es $R(x) = (n^2 + 3n - 3)(x - 1) + n = (n^2 + 3n - 3)x - n^2 - 2n + 3$.
- b) El resto de dividir $P(x) = nx^{n+2} - (n + 2)x^{n+1} + (n + 2)x - n$ entre $Q(x) = (x - 1)^3$ es $R(x) = 0$. Es decir, $Q(x)$ divide a $P(x)$.
10. a) El resto de dividir $P(x)$ entre $Q(x) = (x - 1)(x - 2)$ es $R(x) = x + 3$.
- b) El resto de dividir $P(x)$ entre $Q(x) = x^3 - x$ es $R(x) = -x^2 + 2x + 1$.
11. Hay dos soluciones: $a = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.
12. Si $m = -1$, entonces $x = 2$ es una raíz común. Es la única posibilidad.
13. $P(x) = x^4 + 12x - 5 = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + 2x - 1)$.
14. $P(x) = (5x^7 - 21x^5 + 35x^3 - 35x)/16$.

15. La primera descomposición viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{-50x - 10}{(x-1)^2(x+2)(x^2+1)} &= \frac{-10}{(x-1)^2} + \frac{5}{x-1} + \frac{2}{x+2} + \frac{9-7x}{x^2+1} \\ &= \frac{-10}{(x-1)^2} + \frac{5}{x-1} + \frac{2}{x+2} - \frac{\frac{7}{2} - \frac{9}{2}i}{x+i} - \frac{\frac{7}{2} + \frac{9}{2}i}{x-i}. \end{aligned}$$

Usando que $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$, obtenemos

$$\frac{3x^2 + 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{2}{x-1} - \frac{13}{x-2} + \frac{14}{x-3}.$$

Usando que $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x-2)^3(x^2+x+1)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{22 - 53x}{x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8} &= \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{12}{(x-2)^3} - \frac{4+x}{x^2+x+1} \\ &= \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{12}{(x-2)^3} - \frac{\alpha}{x-\beta} - \frac{\bar{\alpha}}{x-\bar{\beta}}, \end{aligned}$$

donde $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{6}i$, $\bar{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{6}i$, $\beta = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $\bar{\beta} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Usando que $x^3 - 3ax^2 + (1 + 3a^2)x - (a^3 + a) = (x-a)(x^2 - 2ax + 1 + a^2)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3 - 3ax^2 + (1 + 3a^2)x - (a^3 + a)} &= \frac{1}{x-a} - \frac{x-a}{x^2 - 2ax + (1 + a^2)} \\ &= \frac{1}{x-a} - \frac{1/2}{x-a-i} - \frac{1/2}{x-a+i}. \end{aligned}$$

16. La descomposición es

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-a)^8(x-b)^4} &= \frac{g(a)}{(x-a)^8} + \frac{g'(a)}{(x-a)^7} + \dots + \frac{g^{(6)}(a)/6!}{(x-a)^2} + \frac{g^{(7)}(a)/7!}{x-a} + \\ &\quad \frac{f(b)}{(x-b)^4} + \frac{f'(b)}{(x-b)^3} + \frac{f''(b)/2}{(x-b)^2} + \frac{f^{(3)}(b)/3!}{x-b}, \end{aligned}$$

donde $f(x) = (x-a)^{-8}$ y $g(x) = (x-b)^{-4}$.

17. a) $Q(x) = 1 + (1-\alpha)x^3$ y $R(x) = 1 + (\beta-1)x^3$.
 b) $P(x) = \alpha(x+2)^3$.
 c) $S(x) = -\beta(x-2)^3$.
 d) $f \in C^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \alpha = \beta = 1/2$, $f \in C^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \alpha = \beta = 1/2$ y f nunca es de clase $C^3(\mathbb{R})$.
 (e) Cuando $\alpha = \beta = 1/2$ los polinomios son

$$P(x) = (x+2)^3/2 \quad Q(x) = 1 - x^3/2 \quad R(x) = 1 + x^3/2 \quad S(x) = -(x-2)^3/2.$$

Se obtiene el típico dibujo de campana de los B-splines.

2. ESPACIOS VECTORIALES

1. a) F sí. G sí.
 b) F sí. G sí.
 c) F sí. G no.
 d) F sí. G no.
2. (i) Sean (x, y, z, t) las coordenadas en \mathbb{R}^4 . Entonces:
 - a) Linealmente dependientes.
 Una base es $((1, 2, 2, 1), (5, 6, 6, 5), (-1, -3, 4, 0))$.
 Una posible ecuación es $\{7x - y + z - 7t = 0\}$.
 - b) Linealmente independientes, luego son una base.
 Una posible ecuación es $\{2x - y = 0\}$.

- c) Linealmente dependientes.
Una base es $((1, 0, 2, 1), (2, 1, 3, 4))$.
Unas posibles ecuaciones son $\{2x - y - z = 0, x + 2y - t = 0\}$.
- d) Linealmente dependientes.
Una base es $((0, 0, 2, -1), (1, 0, 3, 2), (0, 1, 1, 1))$.
Una posible ecuación es $\{7x + 3y - z - 2t = 0\}$.
- e) Linealmente independientes, luego son una base de \mathbb{R}^4 .
- f) Linealmente independientes, luego son una base.
Una posible ecuación es $\{7x + 25y + z - 10t = 0\}$.
- (ii) Son linealmente independientes y una base de \mathbb{R}^3 . No tiene ecuaciones.
- (iii) No se pueden dar las ecuaciones, ya que $\dim F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \infty$.
- a) Son linealmente dependientes. Una base es $(e^{i\pi t})$.
- b) Son linealmente independientes, luego son una base.
3. a) Una base de U es $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$.
Una base de V es $((1, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 1))$.
- b) Una base de F es $((x-1)^2, (x-1)^3) = (x^2 - 2x + 1, x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$.
- c) Una base de G es $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
- d) Una base de F es $((1, 1, 0, 0), (0, 3, 0, 1), (0, 0, 1, 0))$.
Una base de G es $((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1))$.
- e) Una base de H es $(x^2 - x - 1, x^3 - x - 1)$.
- f) Una base de I es $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.
4. a) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y + z = 0, 5x + y - t = 0\}$.
 $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y = 0, z = 0, x - t = 0\}$.
- b) $F = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] : 3a_0 - a_2 = 0, a_1 = 0, a_3 = 0\}$.
- c) $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a + d = 0, b = 0, c = 0 \right\}$.
- d) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 3z - t = 0\}$.
 $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = 0\}$.
- e) $F = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] : 9a_0 - 24a_1 + 16a_2 = 0\}$.
- f) $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a - 4b + c + d = 0 \right\}$.
5. a) Sí. Una base es $(x^2 - x - 1)$.
- b) Sí. Una base es $(x^2 + 3, x)$.
6. a) Es una demostración.
- b) $e_1 + \dots + e_n = -u_1 - 2u_2 - 3u_3 - \dots - (n-1)u_{n-1} + nu_n$.
7. a) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 3x - y - 5z - t = 0\}$.
- b) Una base de G es $((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$.
- c) $F \cap G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 3x - y - 5z - t = 0, x - y + z + t = 0\}$.
Una base de $F \cap G$ es $((1, 2, 0, 1), (3, 4, 1, 0))$.
 $F + G = \mathbb{R}^4$.
8. a) $\dim V_1 = 2$ y $\dim V_2 = 1$.
Una base de V_1 es $((1, -1, 0), (1, 0, -1))$.
Una base de V_2 es $((1, 2, 3))$.
- b) Si $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la descomposición $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in V_1$, $u_2 \in V_2$, es:

$$u_1 = \left(\frac{5x - y - z}{6}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + z}{2} \right),$$

$$u_2 = \left(\frac{x + y + z}{6}, \frac{x + y + z}{3}, \frac{x + y + z}{2} \right).$$

9. a) Una base de $F_1 + F_2$ es $(1 + 2t + t^2, 1 + t - t^2 - t^3, 1 + t + t^3)$.
 Una base de $F_1 \cap F_2$ es $(1 + t - t^2 - t^3)$.
 La suma $F_1 + F_2$ no es directa y tampoco es igual a $E = \mathbb{R}_3[t]$.
 b) Una base de $F_1 + F_2$ es $(1, t, t^2, t^3)$.
 Una base de $F_1 \cap F_2$ es $(1 - 2t^2)$.
 La suma $F_1 + F_2$ no es directa, aunque si es igual a $E = \mathbb{R}_3[t]$.
10. a) La suma $F + G$ no es directa, aunque si es igual a $M_2(\mathbb{R})$.
 b) $F \oplus G = M_2(\mathbb{R})$.
11. Si notamos por G a un complementario de F en E , entonces
 a) $G = [(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]$.
 b) $G = [x^3]$.
 c) $G = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$.
 d) $G = [1, x^2]$.
 e) $G = \{0\}$, ya que $F = E$.
 f) $G = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$.
12. a) $\dim F = 2$. Una base de F es $((x - 1)^2, (x - 1)^3)$.
 b) Sí.
 c) $G = \mathbb{R}_1[x] = [1, x] = [1, x - 1]$.
13. a) $\dim F = 2$. Una base de F es $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$.
 b) Sí. Sí. Sí.
 c) $G = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$.
14. a) $\dim F = 1$ y $\dim G = 2$. $F = [t^2 - t]$ y $G = \mathbb{R}_1[t] = [1, t]$.
 b) $t^2 - 5t + 2 \notin G$.
 $3t - 4 \in G$. No son únicos: $\lambda_0 = \mu - 4$, $\lambda_1 = 7 - 2\mu$ y $\lambda_2 = \mu$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$.
 c) $\dim F \cap G = 0$ y $\dim F + G = 3$. $F \cap G = \{0\}$ y $F + G = \mathbb{R}_2[t] = [1, t, t^2]$. La suma $F + G$ es directa.
 d) Una base de un complementario de $F + G$ en $\mathbb{R}_3[t]$ es (t^3) .
15. a) Es una demostración.
 b) $\dim F = 2$ y $\dim H = 1$.
 c) Una base de F es (x^2, x^3) .
 Una base de H es $(x^3 - x^2 + 2x - 1)$.
 d) $\dim F \cap H = 0$ y $\dim F + H = 3$. $F \cap H = \{0\}$.
 Una base de $F + H$ es $(1 - 2x, x^2, x^3)$.
 e) Una base de un complementario de F en $\mathbb{R}_3[x]$ es $(1, x)$.
 Una base de un complementario de H en $\mathbb{R}_3[x]$ es $(1, x, x^2)$.
16. a) Es una demostración.
 b) Es una demostración.
 c) $\dim F = \infty$ y $\dim G = 2$.
 Una base de G es $((1, 0, 1, 1, 2, 3, \dots), (0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots))$.
17. a) Es una demostración.
 b) Es una demostración.
 c) La suma es directa, ya que dada una función $h(x) \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ existen unas únicas funciones $f(x) \in P$ y $g(x) \in I$ tales que $h(x) = f(x) + g(x)$:
- $$f(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2}, \quad g(x) = \frac{h(x) - h(-x)}{2}.$$
18. a) Una base de \mathbb{R}^3/F es $((1, 0, 0) + F)$.
 b) Una base de \mathbb{R}^3/F es $((1, 0, 0) + F, (0, 1, 0) + F)$.

19. a) $(1, 1, -1, 1) + F$.
 b) Sí.
 c) Sí.
20. No. No. Sí.
21. Una base de \mathbb{R}^5/F es $(u_1 + F, u_2 + F)$ con $u_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$ y $u_2 = (0, 0, 1, 0, 0)$.
 $(0, 1, -1, 0, 0) + F = 0 \cdot (u_1 + F) + (-1) \cdot (u_2 + F) = -u_2 + F$.
22. Una base de \mathbb{R}^5/F es $(u_1 + F, u_2 + F)$ con $u_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$ y $u_2 = (0, 1, 0, 0, 0)$.
 $(1, 0, 0, 1, 0) + F = 1 \cdot (u_1 + F) + 0 \cdot (u_2 + F) = u_1 + F$.
23. $\dim M = 6$, $\dim N = 7$ y $\dim(M + N) = 9$.

3. MATRICES

1. a) Sistema compatible determinado, siendo su solución $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
 b) Sistema incompatible.
 c) Sistema compatible indeterminado con 2 grados de libertad, siendo sus soluciones

$$X = \begin{pmatrix} 1 + 2a & 2b \\ 1 - \frac{5}{2}a & 1 - \frac{5}{2}b \\ -\frac{3}{2}a & -\frac{3}{2}b \\ a & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

- d) Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$, el sistema es compatible determinado, siendo su solución

$$X = \frac{1}{(\alpha - 1)(\alpha + 2)} \begin{pmatrix} \alpha - 1 & -2 \\ \alpha - 1 & 2(\alpha + 1) \\ \alpha - 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si $\alpha = 1$ o $\alpha = -2$, el sistema es incompatible.

- e) Sistema compatible indeterminado con 2 grados de libertad, siendo sus soluciones

$$X = \begin{pmatrix} 1 - a & 1 - b \\ 1 - a & 2 - b \\ 1 - a & 1 - b \\ a & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

2. a) Sistema compatible determinado, siendo su solución $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
 b) Sistema compatible indeterminado con 2 grados de libertad, siendo sus soluciones

$$X = \begin{pmatrix} 1 - 2a & a - 1 & a \\ -1 - 2b & 2 + b & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

- c) Sistema incompatible.
 d) Sistema compatible indeterminado con 2 grados de libertad, siendo sus soluciones

$$X = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} - \frac{1}{4} & -\frac{3}{2}a + \frac{7}{4} & a \\ \frac{b}{2} + \frac{5}{4} & -\frac{3}{2}b - \frac{3}{4} & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

3. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 17 \\ 4 & -5 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

- b) Si $a \neq 1$, entonces $B^{-1} = \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $a = 1$, entonces la matriz B no es invertible.

c) Si $abc \neq 0$, entonces $C^{-1} = \frac{1}{2abc} \begin{pmatrix} -c^2 & bc & ac \\ bc & -b^2 & ab \\ ac & ab & -a^2 \end{pmatrix}$.

Si $abc = 0$, entonces la matriz C no es invertible.

d) $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a^{n-4} & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. a) El sistema es compatible determinado, siendo su solución $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ y $x_3 = -1$.
 b) El sistema es compatible indeterminado con 2 grados de libertad, siendo sus soluciones $x_1 = 1 - 2x_4 - \frac{3}{2}x_5$, $x_2 = \frac{2}{3} - \frac{11}{3}x_4 - \frac{3}{2}x_5$, $x_3 = \frac{1}{3} - \frac{7}{3}x_4 - \frac{1}{2}x_5$, $x_4, x_5 \in \mathbb{R}$.
 5. a) La resolución completa es muy larga. La discusión de casos es la siguiente.

Caso	Discusión
$a = 1$ y $b = 1$	Compatible indeterminado con 3 grados de libertad
$a = 1$ y $b \neq 1$	Incompatible
$a = -3$ y $b = -1$	Compatible indeterminado con 1 grado de libertad
$a = -3$ y $b \neq -1$	Incompatible
$a \neq 1, -3$	Compatible determinado

- b) Al igual que en el apartado anterior, nos limitamos a discutir el sistema.
 Si $a \neq b \neq c \neq a$, el sistema es compatible determinado.
 Si $a = b$, $a = c$ o $b = c$, pero ninguno de los números a, b, c es igual a uno, el sistema es incompatible.
 Si $a = b$, $a = c$ o $b = c$, y alguno de los números a, b, c es igual a uno, el sistema es compatible indeterminado.
 6. El sistema es compatible y determinado. La única solución del sistema viene dada por $x_1 = 0$, $x_2 = a_1$, $x_3 = a_2, \dots, x_n = a_{n-1}$ y $x_{n+1} = a_n$.
 7. Si $\alpha = 1$, el sistema es compatible indeterminado con 4 grados de libertad, siendo sus soluciones

$$X = \begin{pmatrix} 1 - a - b & a & b \\ 1 - c - d & c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Si $\alpha = -2$, el sistema es incompatible.

Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$, el sistema es compatible determinado, siendo su solución

$$X = \frac{1}{\alpha + 2} \begin{pmatrix} -(\alpha + 1) & 1 & (\alpha + 1)^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Hay equilibrio cuando $P_1 = D_1$, $P_2 = D_2$ y $P_3 = D_3$. Resolviendo el sistema queda $P_1 = 23$, $P_2 = 120$ y $P_3 = 40$.
 9. Las proporciones son 12'5%, 75% y 12'5%, respectivamente.
 10. a) Compatible determinado, con $X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & -17 \\ -37 & 14 \end{pmatrix}$ y $Y = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
 b) Compatible determinado, con $X = \begin{pmatrix} 28 & 5 \\ -11 & -2 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 11. a) $A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 44 & 0 & -77 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -11 & 0 & 22 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
 b) Sí.
 12. Es una demostración.
 13. El sistema $A^8 X = B$ es compatible y determinado, pues $\det A^8 = (\det A)^8 \neq 0$.

$$14. \quad a = 0, b = 1 \text{ y } X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. APLICACIONES LINEALES

1. a) Sí.
- b) No.
- c) Sí.
- d) No.
- e) Sí.
- f) f es lineal si y sólo si $a = 0$.

2. a) Es una demostración.
- b) Una base del núcleo es $((2, 1, -1))$.
Una base de la imagen es $((1, 0, 1), (0, 1, 0))$.
- c) No. No. No.

3. (i) a) La matriz de f en las bases naturales es $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- b) La aplicación es inyectiva, ya que $\text{Nuc } f = \{0\}$.
Una base de la imagen es $((2, 1, -1, 0), (5, 2, 2, 1), (5, -2, 3, 2))$.

- (ii) a) La matriz de f en las bases naturales es $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
- b) La aplicación es inyectiva, ya que $\text{Nuc } f = \{0\}$.
Una base de la imagen es $((3, 2, 1, 4, 0), (0, 3, 1, 0, 0), (0, 1, 3, 0, 1))$.

4. a) $\text{Nuc } f \neq 0 \Leftrightarrow \text{rango } f < 3 \Leftrightarrow \det f = 0 \Leftrightarrow p = 1$.
- b) Si $p = 1$, una base del núcleo es $((1, 0, -1))$.
- c) Cuando $f(4, 0, -4) = (0, 0, 0)$, necesariamente $p = 1$.
Si $p = 1$, una base de la imagen es $((-1, 2, 2), (2, 1, 0))$.

5. a) Es una demostración.

- b) Una base de $\text{Nuc } f$ es $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

$$\text{Una base de } \text{Im } f \text{ es } \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

$$c) \quad M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- d) Un complementario del núcleo en $M_2(\mathbb{R})$ es $\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$.

Un complementario de la imagen en $M_3(\mathbb{R})$ es $[M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{31}, M_{32}, M_{33}]$, donde M_{ij} denota a la matriz de $M_3(\mathbb{R})$ cuyos elementos son todos nulos, excepto el situado en la fila i y la columna j , que es igual a uno.

6. a) Sí.
 b) Una base de $\text{Nuc } f$ es $((1, 1, 1))$, luego $\dim \text{Nuc } f = 1$.
 Una base de $\text{Im } f$ es $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$, luego $\text{rango } f = \dim \text{Im } f = 2$.
 c) La aplicación no es inyectiva, ya que $\text{Nuc } f \neq \{0\}$.
 La aplicación no es exhaustiva, ya que $2 = \text{rango } f < \dim M_2(\mathbb{R}) = 4$.
 d) La matriz de f en las bases u y v es $M_v^u(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
7. Una posibilidad es la aplicación $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z, t) = (x - 3y + t, y - t).$$

La matriz de esta aplicación en las bases naturales es $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

La aplicación f es exhaustiva, ya que $\text{rango } f = 2$.

8. a) $\text{Nuc } f = [(1, 0, 0)]$ e $\text{Im } f = [(2, 0, 0), (1, 3, 0)]$.
 b) Una posible base es la formada por $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (0, \frac{1}{2}, 0)$ y $u_3 = (0, -\frac{1}{12}, \frac{1}{6})$.
9. Una posible base u es la formada por $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0)$ y $u_3 = (-2, 1, 1) \in \text{Nuc } f$; mientras que una posible base v es la formada por los vectores $v_1 = f(u_1) = (1, -1, 2, 0)$, $v_2 = f(u_2) = (1, 1, 0, -1)$, $v_3 = (0, 0, 1, 0)$ y $v_4 = (0, 0, 0, 1)$.
10. a) La matriz en la base natural es $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 b) La matriz en la base (u, v, w) es $B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & 17 & 21 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -14 & 2 \end{pmatrix}$.
 c) Sí, pues $\text{rango } A = 3$. (O también: Sí, pues $\det A \neq 0$).
 La aplicación inversa es $f^{-1}(x, y, z) = (x/3, x/3 - y, -x + y + z)$.
 La matriz de la inversa en la base natural es $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 La matriz de la inversa en la base (u, v, w) es $B^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 & 82 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 4 & -40 & 2 \end{pmatrix}$.
 d) Es una comprobación. Basta ver que $(A^2 - \text{Id})(A - 3\text{Id}) = 0$. (También se puede comprobar viendo que el polinomio característico de la aplicación f es $Q_f(t) = (t^2 - 1)(t - 3)$, pero eso corresponde a un tema posterior.)
11. a) Es una demostración.
 b) $\text{Nuc } f = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$ y $\text{Nuc } g = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$.
 c) $f \circ g : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 2(b-c) \\ 2(b-c) & 0 \end{pmatrix}$ y $g \circ f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 d) Es una demostración.

- e) Las matrices de f en las bases $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ y $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ son

$$M_e^e(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_u^u(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. a) Es una demostración.
 b) $\text{Nuc } f = [1] \neq \{0\}$ e $\text{Im } f = \mathbb{R}[x]$.
 c) $\text{Nuc } g = \{0\}$ e $\text{Im } g = [x, x^2, x^3, \dots] = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(0) = 0\} \neq \mathbb{R}[x]$.
 d) f es exhaustiva, pero no inyectiva. g es inyectiva, pero no exhaustiva.
 e) $f \circ g = \text{Id} \neq g \circ f$, ya que $f \circ g : p(x) \mapsto p(x)$ y $g \circ f : p(x) \mapsto p(x) - p(0)$.
 f) La moraleja de este problema es la siguiente: “Los espacios de dimensión finita son más simples que los espacios de dimensión infinita”. Por ejemplo, si E es un espacio de dimensión finita y tenemos dos endomorfismos $f, g : E \rightarrow E$ sabemos que:
 - f es inyectiva si y sólo si f es exhaustiva.
 - $f \circ g = \text{Id} \Leftrightarrow g \circ f = \text{Id} \Leftrightarrow g = f^{-1} \Leftrightarrow f = g^{-1}$.
 Estas propiedades son falsas cuando $\dim E = \infty$.
13. a) La matriz de f en las bases naturales es $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.
 b) La matriz de f en las bases \mathcal{B}'_1 y \mathcal{B}'_2 es $B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{8}{3} & 3 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$.
 c) Las coordenadas de la imagen del vector $(1, 2, 3)_{\mathcal{B}_1}$ son $(\frac{26}{3}, \frac{11}{3})_{\mathcal{B}'_2}$.
14. a) La matriz de f en las bases \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 b) f es biyectiva, ya que $\det A \neq 0$.
 c) La matriz de f en las bases \mathcal{B}'_1 y \mathcal{B}'_2 es $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.
15. a) Es una demostración.
 b) $D \circ M - M \circ D = \text{Id}$, ya que

$$D \circ M : p(x) \mapsto p(x) + xp'(x), \quad M \circ D : p(x) \mapsto xp'(x).$$
 c) No, aunque la restricción de D al espacio $\mathbb{R}_n[x]$ si es nilpotente.
16. a) Es una demostración.
 b) Queremos calcular la inversa de la aplicación $f = \text{Id} - D$, donde D denota la derivada. Sabemos que $D^{n+1} = 0$ en los polinomios de grado $\leq n$. Por tanto, usando la identidad $(\text{Id} - D) \circ (\text{Id} + D + D^2 + \dots + D^n) = \text{Id} - D^{n+1}$, se obtiene que la aplicación f es invertible, siendo su inversa $f^{-1} = \text{Id} + D + D^2 + \dots + D^n$.
17. Es un problema teórico.
 18. Es un problema teórico.
 19. Es un problema teórico.
 20. El enunciado de este problema tiene un error tipográfico.
 21. a) Para probar que la aplicación $f_A : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ es lineal basta ver que

$$\begin{aligned} f_A(\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2) &= A(\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2) - (\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2)A \\ &= \beta_1(AB_1 - B_1A) + \beta_2(AB_2 - B_2A) \\ &= \beta_1 f_A(B_1) + \beta_2 f_A(B_2). \end{aligned}$$
 b) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la matriz de f_A es $M(f_A) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}$.
 c) El valor máximo (respectivamente, mínimo) que puede alcanzar $\dim \text{Nuc } f_A$ al variar la matriz A es 4 (respectivamente, 2). (Nota: $[\text{Id}, A] \subset \text{Nuc } f_A$.)

d) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $\text{Nuc } f_A = [\text{Id}, A] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$.

Si $A = \text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $\text{Nuc } f_A = M_2(\mathbb{R})$.

22. a) Basta comprobar que $M^2 + M + \text{Id} = 0$.
 b) Si escribimos la nueva base como $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) = (e_1, g(e_1), e_3, g(e_3))$, vemos que

$$\begin{aligned} g(u_1) &= g(e_1) = u_2, \\ g(u_2) &= g^2(e_1) = -g(e_1) - e_1 = -u_1 - u_2, \\ g(u_3) &= g(e_3) = u_4, \\ g(u_4) &= g^2(e_3) = -g(e_3) - e_3 = -u_3 - u_4. \end{aligned}$$

Por tanto, la matriz de g en la base u es $M_u^u(g) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- c) Una base de E_{e_1} es $(u_1, u_2) = (e_1, g(e_1))$.
 d) Sí, g es un endomorfismo de E_{e_1} , ya que E_{e_1} es invariante por g .
 La matriz de la restricción de g al subespacio invariante E_{e_1} en la base (u_1, u_2) es la parte superior izquierda de la matriz $M_u^u(g)$; es decir, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

23. Es un problema teórico.
 24. Es un problema teórico.
 25. Es un problema teórico.

26. a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 8 & -5 & -1 & 2 \\ 7 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 8 & -5 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{32}{23} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{43}{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

27. (i) Dado un vector arbitrario $(x, y, z, t) \in F$, notamos $(x', y', z', t') = f(x, y, z, t)$.
 Entonces $(x', y', z', t') \in F$, ya que

$$\begin{aligned} x' + z' &= (3x - 10y - 18z - 9t) + (14y + 29z + 13t) \\ &= 3 \cdot (x + z) + 4 \cdot (y + 2z + t) = 0, \\ y' + 2z' + t' &= (3x + 7y + 14z + 6t) + 2 \cdot (14y + 29z + 13t) + \\ &\quad (-3x - 20y - 42z - 17t) \\ &= 15 \cdot (y + 2z + t) = 0. \end{aligned}$$

- (ii) Una base de F es (u_1, u_2) , donde $u_1 = (1, -1, -1, 0)$ y $u_2 = (2, 0, 0, 1)$. Para probar que F es invariante basta ver que

$$f(u_1) = (-1, -1 - 1, -1) \in F, \quad f(u_2) = (2, 0, 0, 1) \in F.$$

28. El subespacio F es invariante si y sólo si $\alpha = 1$.

29. El subespacio F es invariante si y sólo si $\alpha = -2$. El enunciado de este problema tiene un error tipográfico. La aplicación debería ser

$$f(x, y, z) = (\alpha x + 2y - 2z, (\alpha - 3)x + \alpha^2 y + 2z, y + (\alpha + 1)z).$$

30. Un subespacio complementario invariante de $F = [1 + x^2]$ en $\mathbb{R}_2[x]$ es $G = [x, 1 - x^2]$.

Resulta muy interesante comparar este problema con el problema 8 del tema 6 (diagonalización), donde se probará que la aplicación f es diagonalizable, siendo sus VAPs los números $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$, mientras que sus respectivos VEPs son los polinomios $P_1(x) = 1 + x^2$, $P_2(x) = x$ y $P_3(x) = 1 - x^2$.

Importante: No se incluyen las soluciones de los problemas sobre dualidad, ya que actualmente están fuera del temario.

5. DETERMINANTES

1.
 - a) 1.
 - b) 131.
 - c) $(x - 1)^3(x + 3) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$.
 - d) 0, pues la cuarta fila es la semisuma de la tercera y la quinta.
 - e) 0, pues la segunda columna es la semisuma de la primera y la tercera.
 - f) 0, pues la primera columna es la semisuma de las otras dos.
2. Una manera de empezar consiste en restarle la primera fila a todas las demás. Al hacer esto, en cada una de las últimas filas aparece un factor común que se puede sacar fuera del determinante: $(a - b)$ en la segunda, $(a - c)$ en la tercera y $(a - d)$ en la cuarta. Además, podemos desarrollar el determinante por la tercera columna que ha quedado llena de ceros. El problema se acaba efectuando operaciones similares.
3. $D_2 = x_2 - x_1$, $D_3 = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$ y $D_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.
4.
 - a) Basta convertir la matriz dada en una matriz triangular inferior, restándole a la primera fila los múltiplos adecuados de todas las demás filas.
 - b) -27 .
5. Recordando las fórmulas del binomio de Newton, vemos que el determinante de la matriz formada por los coeficientes de los polinomios $p_i(x) = (x - a_i)^4$ casi tiene la forma de un determinante de Van der Monde. Una vez visto esto, basta aplicar el problema 3.
6. La matriz A tiene rango máximo y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
La matriz B no es invertible, pues $\text{rango}(B) = 3$.
7.
 - a) Sistema compatible determinado: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.
 - b) Sistema compatible indeterminado: $x_1 = x_3$, $x_2 = 1 - 2x_3$ y x_3 queda libre.
 - c) Sistema compatible indeterminado: $x_1 = 1 + x_2 + x_5$, $x_3 = -x_6$, $x_4 = 1 + x_5$ y x_2, x_5, x_6 quedan libres.
8.
 - a) $\det f = -1$, pues la matriz de la aplicación f en la base natural de $M_2(\mathbb{R})$ es la matriz identidad con las columnas segunda y tercera permutadas.
 - b) $\det f = (ad - bc)^2 = (\det M)^2$.
9. El determinante de una matriz no cambia si a una de sus columnas le sumamos una cl de las demás columnas. Por tanto, podemos substituir la quinta columna de la matriz A por

$$c'_5 = c_5 + 10c_4 + 100c_3 + 1000c_2 + 10000c_1 = \begin{pmatrix} 58786 \\ 30628 \\ 12831 \\ 80743 \\ 16016 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4522 \times 13 \\ 2356 \times 13 \\ 987 \times 13 \\ 6211 \times 13 \\ 1232 \times 13 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, sacamos el 13 como factor común de la quinta columna y notamos que el determinante de la matriz que queda es un número entero, pues todos sus elementos son enteros.

6. DIAGONALIZACIÓN

1. a) El polinomio característico es

$$Q_A(t) = -t^3 + 5t^2 - 9t + 9 = -(t-3)(t-1+i\sqrt{2})(t-1-i\sqrt{2}).$$

Así pues, la matriz A tiene tres VAPs simples (dos complejos conjugados). Por tanto, A no diagonaliza ni en \mathbb{Q} ni en \mathbb{R} , pero si diagonaliza en \mathbb{C} .

- b) El polinomio característico es

$$Q_B(t) = -t^3 + 4t^2 + 3t - 2 = -(t+1)\left(t - \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\left(t - \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right).$$

Así pues, la matriz B tiene tres VAPs simples (dos reales, pero no racionales). Por tanto, B no diagonaliza en \mathbb{Q} , pero si diagonaliza en \mathbb{R} o \mathbb{C} .

- c) El polinomio característico es $Q_C(t) = (t-2)^3(t+2)$ y $\dim \text{Nuc}(C-2\text{Id}) = 3$. Por tanto, la matriz C diagonaliza en los tres casos.
 d) El polinomio característico es $Q_D(t) = -(t+2)(t-1)^2$ y $\dim \text{Nuc}(D-\text{Id}) = 1$. Por tanto, la matriz D no diagonaliza en ningún caso.
2. a) La matriz diagonaliza si y sólo si $a = f = 0$.
 b) La matriz diagonaliza siempre.
 c) La matriz diagonaliza si y sólo si $bf + 2c = 0$.

3. a) La matriz de la aplicación f en la base natural es
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & a+2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & a-3 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

- b) La aplicación f diagonaliza si y sólo si $a \neq 1, 2$.

4. a) Los VAPs son $\lambda_1 = a + b + c + d$, $\lambda_2 = a - b$, $\lambda_3 = a - c$ y $\lambda_4 = a - d$.

- b) Los VAPs son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = b - a$, $\lambda_3 = 2a + b$ y $\lambda_4 = c$.

5. (i) a) Los VAPs de la matriz A son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ y $\lambda_3 = \frac{1}{4}$.

- b) Una matriz diagonal D y una matriz invertible S tales que $SD = AS$ vienen dadas por

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (ii) a) Los VAPs de la matriz B son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

- b) Una matriz diagonal D y una matriz invertible S tales que $SD = BS$ vienen dadas por

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. (i) $Q_f(t) = (t-1)^3(t+1)$ y $\dim \text{Nuc}(f - \text{Id}) = 3$. Por tanto, la aplicación f diagonaliza.

Una base de VEPs es $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

- (ii) $Q_f(t) = (t-1)^2(t+1)^2$, $\dim \text{Nuc}(f - \text{Id}) = 2$ y $\dim \text{Nuc}(f + \text{Id}) = 2$. Por tanto, f diagonaliza.

Una base de VEPs es $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$.

7. Los VAPs de la aplicación f son $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = \gamma$ y $\lambda_3 = -1$. La coincidencia de dos VAPs es el principal obstáculo a la diagonalización de f .

En la siguiente tabla se listan los casos en que la aplicación f diagonaliza, junto con una base de VEPs para cada caso.

Caso	Base de VEPs
$\alpha \neq -1 \neq \gamma$ y $\alpha \neq \gamma$	$v_1 = \left(\alpha - \gamma, \frac{3\beta}{\alpha+1}, 3\right)$, $v_2 = (0, \beta, \gamma + 1)$ y $v_3 = (0, 1, 0)$
$\alpha = -1 \neq \gamma$ y $\beta = 0$	$v_1 = (\gamma + 1, 0, -3)$, $v_2 = (0, 0, 1)$ y $v_3 = (0, 1, 0)$
$\alpha \neq -1 = \gamma$ y $\beta = 0$	$v_1 = (\alpha + 1, 0, 3)$, $v_2 = (0, 0, 1)$ y $v_3 = (0, 1, 0)$

8. a) La matriz de f en la base $(1, x, x^2)$ es $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- b) Los VAPs de f son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$.
Una base de VEPs es $v = (1 + x^2, x, 1 - x^2)$.
- c) Una matriz diagonal D y un cambio de base B tales que $D = B^{-1}AB$ vienen dados por

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. a) Si $\text{gr}[P(x)] \neq 2$, $\text{gr}[L(P(x))] = \text{gr}[P(x)] + 1$.
Si $\text{gr}[P(x)] = 2$, $\text{gr}[L(P(x))] \leq \text{gr}[P(x)]$.
- b) No, ya que la imagen de L no contiene ningún polinomio de grado tres.
- c) Los VAPs de la aplicación L son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 3$. Por tanto, los polinomios (o vectores) propios de la aplicación son los elementos no nulos de los subespacios $\text{Nuc}(L - \text{Id}) = [x^2 - 1]$, $\text{Nuc}(L + \text{Id}) = [x^2 - 2x + 1]$ y $\text{Nuc}(L - 3\text{Id}) = [x^2 + 2x + 1]$.
10. a) La matriz A es invertible, ya que $\det A = 2 \neq 0$.

Además, $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3\text{Id}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ a^{-1} & -1 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & -1 \end{pmatrix}$.

- b) La matriz A siempre diagonaliza. Una matriz diagonal D y una matriz de cambio de base S tales que $D = S^{-1}AS$ vienen dadas por

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -a & -a^2 & a^2 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) $A^p = SD^pS^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(-1)^p + \frac{1}{3}2^p & \frac{a}{3}(2^p - (-1)^p) & \frac{a^2}{3}(2^p - (-1)^p) \\ \frac{a^{-1}}{3}(2^p - (-1)^p) & \frac{2}{3}(-1)^p + \frac{1}{3}2^p & \frac{a}{3}(2^p - (-1)^p) \\ \frac{a^{-2}}{3}(2^p - (-1)^p) & \frac{a^{-1}}{3}(2^p - (-1)^p) & \frac{2}{3}(-1)^p + \frac{1}{3}2^p \end{pmatrix}$.

11. Supondremos que $a \neq 0$, pues de lo contrario $A = 0$ ya es diagonal.
La matriz A siempre diagonaliza. Una matriz diagonal D y una matriz de cambio de base S tales que $D = S^{-1}AS$ vienen dadas por

$$D = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. a) Si λ es un VAP de f , entonces $P(\lambda)$ es un VAP de $P(f)$.
b) Si λ es un VAP de f , entonces λ^{-1} es un VAP de f^{-1} .
c) Si D es una matriz diagonal de f , entonces $P(D)$ y D^{-1} (si f es invertible) son matrices diagonales de $P(f)$ y f^{-1} , respectivamente.
13. (i) a,b) Una matriz diagonal D y una matriz de cambio de base S tales que $D = S^{-1}MS$ vienen dadas por

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Las soluciones diagonales de la ecuación $Y^2 - DY + D^2 = 12\text{Id}$ son

$$Y_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

d) Si $X = SYS^{-1}$, entonces $X^2 - MX + M^2 = 12\text{Id} \Leftrightarrow Y^2 - DY + D^2 = 12\text{Id}$.
Por tanto, unas soluciones de la ecuación $X^2 - MX + M^2 = 12\text{Id}$ son

$$X_1 = SY_1S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = SY_2S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) El enunciado tiene un error tipográfico. El elemento situado en la tercera fila y tercera columna de la matriz N debería ser -10 . De lo contrario, la matriz N tiene VAPs complejos conjugados y los cálculos son muy pesados.

a,b) Una matriz diagonal D y una matriz de cambio de base S tales que $D = S^{-1}NS$ vienen dadas por

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) La única solución diagonal de la ecuación $Y^2 - DY + D^2 = 3\text{Id}$ es

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

d) Si $X = SYS^{-1}$, entonces $X^2 - NX + N^2 = 3\text{Id} \Leftrightarrow Y^2 - DY + D^2 = 3\text{Id}$.
Por tanto, una solución de la ecuación $X^2 - NX + N^2 = 3\text{Id}$ es

$$X = SYS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & -6 \\ 8 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

14. La matriz de la aplicación en la base natural es $M_e^e(f) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -3 & -7 \\ 15 & 10 & 15 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

15. La matriz de la aplicación en la base natural es $M_e^e(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

16. a) El polinomio característico es $Q_f(t) = -t(t-1)^2$ y $\dim \text{Nuc}(f - \text{Id}) = 1$. Por tanto, la aplicación f no diagonaliza.

b) Una base de F es la formada por los vectores $u_1 = (1, 1, 0)$ y $u_2 = (0, 1, 1)$. Además, $f(u_1) = u_1$ y $f(u_2) = u_2 - u_1$. Por tanto, el subespacio F es invariante. La restricción $f|_F$ no diagonaliza.

Una base de G es la formada por los vectores $v_1 = (1, 1, 0)$ y $v_2 = (1, -1, -1)$. Además, $f(v_1) = v_1$ y $f(v_2) = 0$. Por tanto, el subespacio G es invariante, $f|_G$ diagonaliza y su

matriz es en la base $v = (v_1, v_2)$ es diagonal: $M_v^v(f|_G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

17. a) El polinomio característico de una matriz $n \times n$ nilpotente A es $Q_A(t) = (-t)^n$.

b) $Q_{A+\text{Id}}(t) = Q_A(t-1) = (1-t)^n$. En particular, $\det(A + \text{Id}) = Q_{A+\text{Id}}(0) = 1$.

c) Es una demostración. (Indicación: Hay que distinguir el caso $\det B = 0$ del caso $\det B \neq 0$.)

18. Es un problema teórico.

19. Es un problema teórico.

7. JORDAN

1. a) El polinomio mínimo de f es $P_f(t) = (t - 2)^5$
- b) La forma de Jordan de f es $J = \text{diag}(J_5(2), J_4(2), J_3(2), 2)$, donde $J_r(\lambda)$ es la matriz $r \times r$ con λ 's en la diagonal y unos en la subdiagonal. Por ejemplo, $J_1(\lambda) = (\lambda)$ y $J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$.
2. a) Hay dos casos: $J = \text{diag}(3, 3, 3, J_2(2), J_2(2))$ y $J' = \text{diag}(3, 3, 3, J_2(2), 2, 2)$.
- b) Hay cuatro posibilidades:

$$\begin{aligned} J &= \text{diag}(J_3(5), J_3(5), 5), \\ J' &= \text{diag}(J_3(5), J_2(5), J_2(5)), \\ J'' &= \text{diag}(J_3(5), J_2(5), 5, 5), \\ J''' &= \text{diag}(J_3(5), 5, 5, 5, 5). \end{aligned}$$

- c) Hay cinco posibilidades:

$$\begin{aligned} J &= \text{diag}(J_3(a), J_3(a), J_2(a)), \\ J' &= \text{diag}(J_3(a), J_3(a), a, a), \\ J'' &= \text{diag}(J_3(a), J_2(a), J_2(a), a), \\ J''' &= \text{diag}(J_3(a), J_2(a), a, a, a), \\ J'''' &= \text{diag}(J_3(a), a, a, a, a, a). \end{aligned}$$

- d) Suponiendo que $a \neq b$, la matriz diagonal $J = \text{diag}(a, a, a, a, a, b, b)$ es la única posibilidad.
3. a) $Q(t) = (2 - t)^7$ y $P(t) = (t - 2)^3$.
- b) $Q(t) = (2 - t)^3(3 - t)^2(4 - t)(5 - t)$ y $P(t) = (t - 2)^3(t - 3)^2(t - 4)(t - 5)$.
- c) $Q(t) = (a - t)^7$ y $P(t) = (t - a)^3$.
- d) $Q(t) = (a - t)^7$ y $P(t) = (t - a)^3$.
4. Una matriz de Jordan J y una matriz invertible S tales que $J = S^{-1}AS$ vienen dadas por

$$J = \text{diag}(J_3(4), J_2(4)) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Una matriz de Jordan J y una matriz invertible S tales que $J = S^{-1}AS$ vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \text{a) } J &= \text{diag}(J_2(0), 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } S = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 0 \\ 0 & 18 & 1 \\ 0 & 18 & -3 \end{pmatrix}. \\ \text{b) } J &= \text{diag}(J_2(0), J_2(0)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \\ \text{c) } J &= J_4(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}. \\ \text{d) } J &= \text{diag}(J_2(2), 2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$e) J = J_4(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$f) J = \text{diag}(J_2(-2), -2, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Una matriz de Jordan J y una matriz invertible S tales que $J = S^{-1}AS$ vienen dadas por:

- a)
 - Si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, entonces $J = 0$ y $S = \text{Id}$.
 - Si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ y $\text{tr } A := a + 2b + 3c = 0$, entonces

$$J = \text{diag}(J_2(0), 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & a & 2\beta + 3\gamma \\ 0 & b & -\beta \\ 0 & c & -\gamma \end{pmatrix},$$

donde $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ pueden ser cualesquiera tales que $\det S = \beta c - \gamma b \neq 0$.

- Si $\text{tr } A := a + 2b + 3c \neq 0$, entonces

$$J = \text{diag}(0, 0, \text{tr } A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{tr } A \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & a \\ -1 & 0 & b \\ 0 & -1 & c \end{pmatrix}.$$

$$b) J = J_6(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. a) Cuando $\alpha = 1$, una base de Jordan tiene 7 VEPs linealmente independientes. Si $\alpha = 2$, una base de Jordan tiene 5 o 6 VEPs linealmente independientes. Cuando $\alpha = 3$, una base de Jordan tiene 5 VEPs linealmente independientes. Cuando $\alpha = 4$, una base de Jordan tiene 4 VEPs linealmente independientes.

b) La aplicación f diagonaliza si y sólo si $\alpha = 1$.

c) Sea $u = (u_1, \dots, u_7)$ una base de Jordan tal que la matriz de la aplicación f en la base u es la matriz de Jordan $M_u(f) = J = \text{diag}(J_4(1), 2, 2, 2)$.

Los siguientes doce subespacios son invariantes: $F_0 = G_0 = \{0\}$, $F_1 = [u_4]$, $F_2 = [u_3, u_4]$, $F_3 = [u_2, u_3, u_4]$, $F_4 = [u_1, u_2, u_3, u_4]$, $G_1 = [u_5]$, $G_2 = [u_6]$, $G_3 = [u_7]$, $G_4 = [u_5, u_6]$, $G_5 = [u_5, u_7]$, $G_6 = [u_6, u_7]$ y $G_7 = [u_5, u_6, u_7]$.

De hecho, también son invariantes los cuarenta subespacios

$$F_j \oplus G_k, \quad j = 0, \dots, 4, \quad k = 0, \dots, 7.$$

8. $A \sim B \Leftrightarrow \beta = 1$.

9. a) $A_1 \sim A_3$ y $A_2 \not\sim A_1, A_3$.

b) Sea J la forma de Jordan común de $A = A_1$ y $B = A_3$. Sean S_A y S_B dos matrices de cambio de base tales que $S_A^{-1}AS_A = J = S_B^{-1}BS_B$. Entonces la matriz $S = S_AS_B^{-1}$ cumple que $B = S^{-1}AS$. Aplicando esta idea, se obtiene que una posible solución es la matriz

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

10. $A \sim B \Leftrightarrow a = b = 0$. Cuando $a = b = 0$, existen infinitas matrices invertibles S tales que $A = S^{-1}BS$. Un par de estas matrices son:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

11. a) La aplicación f diagonaliza si y sólo si $\alpha = \beta = 1$.
 b) Cuando $\alpha = 1$, una base de Jordan tiene 6 VEPs linealmente independientes. Si $\alpha = 2$, una base de Jordan tiene 4 o 5 VEPs linealmente independientes. Si $\alpha = 3$, una base de Jordan tiene 3 o 4 VEPs linealmente independientes. Cuando $\alpha = 4$, una base de Jordan tiene 3 VEPs linealmente independientes. Cuando $\alpha = 5$, una base de Jordan tiene 2 VEPs linealmente independientes.
 c) Hay dos casos: $J = \text{diag}(J_3(3), J_2(3), J_2(-2))$ y $J' = \text{diag}(J_3(3), 3, 3, J_2(-2))$.

En el primer caso, $u = (u_1, \dots, u_7)$ es una base de Jordan si y sólo si:

- $u_1 \in \text{Nuc}(f - 3\text{Id})^3 \setminus \text{Nuc}(f - 3\text{Id})^2$, $u_2 = (f - 3\text{Id})(u_1)$ y $u_3 = (f - 3\text{Id})(u_2)$.
- $u_4 \in \text{Nuc}(f - 3\text{Id})^2 \setminus \text{Nuc}(f - 3\text{Id})$ y $u_5 = (f - 3\text{Id})(u_4)$.
- $u_6 \in \text{Nuc}(f + 2\text{Id})^2 \setminus \text{Nuc}(f + 2\text{Id})$ y $u_7 = (f + 2\text{Id})(u_6)$.
- Los VEPs u_3 y u_5 son linealmente independientes.

En el segundo caso, $u' = (u'_1, \dots, u'_7)$ es una base de Jordan si y sólo si:

- $u'_1 \in \text{Nuc}(f - 3\text{Id})^3 \setminus \text{Nuc}(f - 3\text{Id})^2$, $u'_2 = (f - 3\text{Id})(u'_1)$ y $u'_3 = (f - 3\text{Id})(u'_2)$.
- u'_4 y u'_5 son VEPs de VAP tres: $u'_4, u'_5 \in \text{Nuc}(f - 3\text{Id})$.
- $u'_6 \in \text{Nuc}(f + 2\text{Id})^2 \setminus \text{Nuc}(f + 2\text{Id})$ y $u'_7 = (f + 2\text{Id})(u'_6)$.
- Los VEPs u'_3, u'_4 y u'_5 son linealmente independientes.

12. a) Una forma de Jordan de M es $J = \text{diag}(J_2(16), 3) = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 1 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- b) Una base de Jordan es $u = (u_1, u_2, u_3)$, donde

$$u_1 = (1, 1, -1), \quad u_2 = (1, 0, 1), \quad u_3 = (0, 0, 1).$$

- c) Hay dos soluciones $A_+ = \begin{pmatrix} \alpha^{1/2} & 0 \\ \alpha^{-1/2}/2 & \alpha^{1/2} \end{pmatrix}$ y $A_- = -A_+$.

- d) Hay varias soluciones. Una de ellas es la matriz

$$\begin{aligned} N &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 - \sqrt{3} & 2\sqrt{3} - \frac{63}{8} & \sqrt{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

13. Hay dos posibilidades: $J = \text{diag}(1, 1, 0)$ y $J' = \text{diag}(1, 0, 0)$.

En el primer caso, la matriz de f en la base natural es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

En el segundo caso, la matriz de f en la base natural es $A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Una forma de Jordan de la matriz A es $J = \text{diag}(J_2(2), J_2(2)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Una base de Jordan de la aplicación f es $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, donde

$$u_1 = (2, 1, 0, -1), \quad u_2 = (0, -1, 1, 0), \quad u_3 = (1, 0, -1, 0), \quad u_4 = (0, 1, 0, -1).$$

En esta base la matriz de la aplicación es la anterior forma de Jordan: $M_u^u(f) = J$. Por tanto, la matriz de la aplicación f en la base natural e de \mathbb{R}^4 es

$$M_e^e(f) = C_e^u M_u^u(f) C_u^e = S J S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

donde $S = C_e^u$ es la matriz del cambio de base de u a e .

15. Acaban todos muertos, ya que mientras un porcentaje de sanos enferma y otro de enfermos muere, ningún enfermo sana y, obviamente, ningún muerto resucita.
16. $J_A = J_B = J_n(1)$. Una posible matriz $S_A = (s_{i,j})$ tiene todos los elementos nulos excepto los siguientes: $s_{n,1} = 1, s_{n-1,2} = -1, s_{n-2,3} = 1, s_{n-3,4} = -1, \dots, s_{1,n} = (-1)^{n-1}$. El cálculo de S_B es demasiado complicado.
17.
 - a) $Q_A(t) = -(t^3 - ct^2 - bt - a)$.
 - b) Si $v = (0, 0, 1)^\top$, entonces v, Av y A^2v son li. Por tanto, $\text{gr}[P_A(t)] > 2$ y $P_A(t) = -Q_A(t)$.
 - c) $Q_A(t) = P_A(t) = (-1)^n(t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \dots - a_1t - a_0)$.