Breves Apuntes de Álgebra Lineal

Rafael Ramírez Ros (http://www.ma1.upc.edu/∼rafael/al/)

Rafael Ramírez Ros (R^3)
Universidad Politécnica de Cataluña (UPC)
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona (ETSEIB)
Departamento de Matemática Aplicada 1 (MA1)
Diagonal 647
08028 Barcelona (España)
mail: `rafael@vilma.upc.edu`
web: `http://www.ma1.upc.edu/~rafael/`

Índice general

Prefacio v

Complejos 1

Polinomios 3

Matrices 7

Espacios Vectoriales 13

Aplicaciones Lineales 23

Determinantes 33

Diagonalización 37

Jordan 43

Prefacio

En estas páginas el lector encontrará los breves apuntes que el autor utiliza durante sus clases de álgebra lineal impartidas en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona (`http://www.etseib.upc.edu/`) de la Universidad Politécnica de Cataluña (`http://www.upc.edu/`).

El autor espera que este trabajo resulte útil y no contenga demasiados errores. Cualquier comentario constructivo será bienvenido.

Rafael Ramírez Ros
Barcelona, a 9 de octubre de 2007

Si tiene solución, ¿por qué te preocupas?
Si no tiene solución, ¿por qué te preocupas?
(Proverbio chino)

Cuando estás acertado, nadie lo recuerda.
Cuando estás equivocado, nadie lo olvida.
(Proverbio irlandés)

Empezar es la mitad de todo. (Proverbio griego)

Errar es humano. (Proverbio romano)

Cuatrocientos cincuenta y un grados Fahrenheit.
La temperatura a la que el papel empieza a arder.
(Ray Bradbury)

Lo bueno, si breve, dos veces bueno.
(Francisco Gómez de Quevedo y Santibáñez Villegas)

Complejos

El cuerpo de los números complejos. El polinomio $P(x) = x^2 + 1$ no tiene raíces reales: ningun número real elevado al cuadrado y sumándole uno da cero. Para solventar problemas de este tipo se inventaron los *números complejos.*

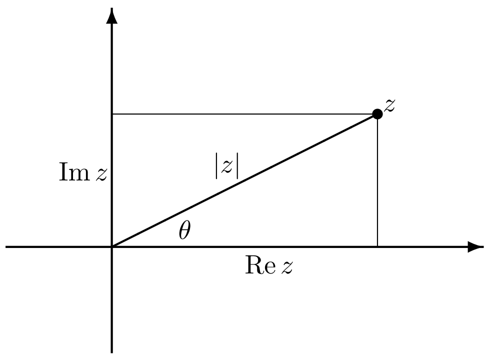
El número complejo más sencillo es el número i. Por definición, este número cumple que $\mathrm{i}^2 = -1$. Cualquier otro número complejo se puede escribir como

$$z = a + b\mathrm{i},$$

donde a y b son números reales. Notaremos por $\mathbb{C}$ al conjunto de los números complejos. Esta manera de escribir los números complejos se llama *forma binomial (o cartesiana).*

El número complejo $z = a + b\mathrm{i}$ se puede representar como un punto del plano, como muestra la figura. En esta figura también hemos representado

- su *parte real*, $\operatorname{Re} z = a$.
- su *parte imaginaria*, $\operatorname{Im} z = b$.
- su *módulo*, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- su *argumento*, $\operatorname{Arg} z = \theta$, donde θ es el ángulo determinado por las fórmulas
$$\cos\theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \qquad \sin\theta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}, \qquad \tan\theta = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}.$$
Importante: Un número complejo tiene infinitos argumentos diferentes, debido a que θ y $\theta + 2\pi$ representan al mismo ángulo. Los argumentos se dan en radianes. ¡Ojo con las calculadoras!



Ejercicio. *Calcular el módulo y el argumento del número* i.

Ejercicio. *Dibujar el número z tal que $|z| = 1$ y $\operatorname{Arg} z = \pi/4$.*

Las cuatro operaciones elementales en forma binomial se realizan así.

- Suma: $(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}$.
- Resta: $(a + b\mathrm{i}) - (c + d\mathrm{i}) = (a - c) + (b - d)\mathrm{i}$.
- Producto: $(a + b\mathrm{i}) \cdot (c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}$.
- Cociente: $\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}} = \frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}\frac{c-d\mathrm{i}}{c-d\mathrm{i}} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)\mathrm{i}}{c^2+d^2}$.
(Multiplicado numerador y denominador por el conjugado del denominador. El *conjugado* de $z = c + d\mathrm{i}$ es $\bar{z} = c - d\mathrm{i}$, se cambia el signo de su parte imaginaria.)

Problemas relacionados. *3 y 5.*

La forma exponencial y la fórmula de Euler. Potencias y raíces. Sumar y restar números complejos es muy fácil. Multiplicarlos y dividirlos, no tanto; pero podemos simplificarlo escribiendo el número complejo z en su *forma exponencial*

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \qquad r = |z|, \qquad \theta = \operatorname{Arg} z$$

o, equivalentemente, en su *forma polar* $z = r_\theta$.

Ejercicio. *Calcular la forma exponencial de los números* 1, i, -1 *y* $-\mathrm{i}$.

Ejercicio. *Calcular la forma binomial de los números* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi}$, $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ *y* $6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$.

Ejercicio. *Usar la* fórmula de Euler

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

para ver de donde sale la forma exponencial de los números complejos.

Problema relacionado. *1.*

La forma exponencial de un número complejo es útil para multiplicar, dividir y calcular su conjugado, sus potencias o sus raíces de forma fácil y cómoda.

- Producto: $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \cdot \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = r\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\varphi)}$.
- Cociente: $\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = (r/\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)}$.
- Conjugado: Si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, entonces $\bar{z} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.
- Potencias: Si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, entonces $z^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.
- Raíces: El número $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ tiene n raíces n-ésimas, a saber

  $$z_k = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2\pi k)/n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

  Las raíces n-ésimas forman un poligono regular de n lados centrado en el origen.

Ejercicio. *Comprobar que la potencia n-ésima de cualquier* z_k *es igual a* z.

Ejercicio. *Comprobar que* z_k *y* z_{k+n} *son el mismo número.*

Ejercicio. *Calcular y dibujar las raíces cuartas del número* 1.

Problemas relacionados. *2, 4 y 7.*

La interpretación geométrica del producto. El producto de dos números complejos en forma exponencial consiste en multiplicar los módulos y sumar los argumentos. Por tanto, la operación de multiplicar por el número complejo $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ se puede interpretar como una rotación de ángulo θ y un homotecia de razón r. Cuando $r > 1$, el módulo se estira, de lo contrario se encoge.

Este hecho sirve para resolver ciertos problemas geométricos en el plano.

Problemas relacionados. *6, 9 y 10.*

Problemas para no dormir. Los problemas 8 y 11 son bastante complicados. Recordad que un *rombo* es un cuadrilátero tal que sus diagonales se cortan perpendicularmente en sus puntos medios. Un *cuadrado* es un tipo particular de rombo tal que sus diagonales tienen la misma longitud.

Polinomios

Primeras definiciones. En este tema $\mathbb{K}$ denota al cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o al cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$. Un *polinomio de una variable x con coeficientes en $\mathbb{K}$* es una expresión del tipo

$$P(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n = \sum_{j=0}^{n} p_j x^j \qquad p_n \neq 0$$

donde $p_0, p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{K}$. Usaremos las siguientes notaciones:

- El *término independiente* es $p_0 = P(0)$.
- El *coeficiente principal* es p_n.
- El polinomio es *mónico* cuando $p_n = 1$.
- Si no es mónico, podemos *normalizarlo*, es decir, convertirlo en mónico dividiéndolo por p_n.
- El *grado* del polinomio es n y escribiremos $\mathrm{gr}[P(x)] = n$. (El polinomio nulo no tiene grado.)
- $\mathbb{K}[x]$ denota al conjunto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K}_n[x]$ denota al conjunto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ de grado menor o igual que n.

Las operaciones básicas para trabajar con polinomios son la *suma de polinomios*, el *producto por escalar* y el *producto de polinomios*. Una manera compacta de listar las propiedades de las primeras operaciones consiste en decir que $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-ev y $\mathbb{K}_n[x]$ es un sev de dimensión $n+1$ de $\mathbb{K}[x]$. El producto de polinomios es una operación asociativa, conmutativa y posee elemento neutro (¿cuál?).

La relación de estas operaciones con el grado es la siguiente:

- $\mathrm{gr}[P(x) + Q(x)] \leq \max\big\{ \mathrm{gr}[P(x)], \mathrm{gr}[Q(x)] \big\}$.
- $\mathrm{gr}[P(x) \cdot Q(x)] = \mathrm{gr}[P(x)] + \mathrm{gr}[Q(x)]$.
- $\mathrm{gr}[\lambda \cdot P(x)] = \mathrm{gr}[P(x)]$, para todo $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$.

División entera de polinomios. Ya sabemos que es la división de números enteros, en la cual se obtiene un cociente y un resto. Por ejemplo, al dividir $p = 37$ entre $q = 5$ se obtiene un cociente $c = 7$ y un resto $r = 2$. Cuando el resto da cero, decimos que la división es exacta y entonces p es un múltiplo de q. Por ejemplo, $p = 35$ es un múltiplo de $q = 5$. Se puede hacer lo mismo con polinomios.

En el *Teorema de la División Entera de Polinomios* se afirma que dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ (llamados *dividendo* y *divisor*), siendo $Q(x)$ no nulo, existen dos únicos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ (llamados *cociente* y *resto*) tales que:

- $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$ y
- O bién $R(x) = \mathbf{0}$, o bién $\mathrm{gr}[R(x)] < \mathrm{gr}[Q(x)]$.

Cuando el resto de la división sea nulo (es decir, si la división es *exacta*), diremos que $Q(x)$ es un *divisor* de $P(x)$, $P(x)$ es un *múltiplo* de $Q(x)$ y escribiremos el símbolo $Q(x) \mid P(x)$.

EJERCICIO. *Probar que las siguientes divisiones enteras son correctas.*

a) $P(x) = x^{99} + 1, Q(x) = x^{45} + 1 \Rightarrow C(x) = x^{54} - x^9, R(x) = x^9 + 1 \Rightarrow x^{45} + 1 \nmid x^{99} + 1$.
b) $P(x) = x^{45} + 1, Q(x) = x^9 + 1 \Rightarrow C(x) = x^{36} - x^{27} + x^{18} - x^9 + 1, R(x) = \mathbf{0} \Rightarrow x^9 + 1 \mid x^{45} + 1$.

EJERCICIO. *Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\lambda \neq 0$. Probar que:*

- *Si $Q(x)$ es un divisor de $P(x)$, el polinomio $\lambda \cdot Q(x)$ también es un divisor de $P(x)$.*
- *Si $P(x)$ es un múltiplo de $Q(x)$, el polinomio $\lambda \cdot P(x)$ también es un múltiplo de $Q(x)$.*

PROBLEMA RELACIONADO. *10.*

MCD y MCM. Al igual que en el párrafo anterior, pensar primero en números enteros ayuda a entender las definiciones y resultados que se dan a continuación.

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, su *máximo común divisor* $D(x) = \text{m.c.d.}[P(x), Q(x)]$ es el polinomio mónico del mayor grado posible que es un divisor de $P(x)$ y $Q(x)$, mientras que su *mínimo común múltiplo* $M(x) = \text{m.c.m.}[P(x), Q(x)]$ es el polinomio mónico del menor grado posible que es un múltiplo de $P(x)$ y $Q(x)$. Diremos que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ son *primos entre sí* cuando $D(x) = 1$. Si p_n es el coeficiente principal de $P(x)$ y q_m es el coeficiente principal de $Q(x)$, entonces

$$P(x) \cdot Q(x) = p_n \cdot q_m \cdot D(x) \cdot M(x).$$

Además, se cumple la *identidad de Bèzout*:

$$\forall P(x), Q(x) \in \mathbb{K}[x] \quad \exists P_1(x), Q_1(x) \in \mathbb{K}[x] \text{ t.q. } D(x) = P_1(x) \cdot P(x) + Q_1(x) \cdot Q(x).$$

Estos polinomios $P_1(x)$ y $Q_1(x)$ no son únicos. No vamos a probar ni la existencia y unicidad de los polinomios $D(x)$ y $M(x)$, ni la existencia de los polinomios $P_1(x)$ y $Q_1(x)$. Sin embargo, describiremos el *algoritmo de Euclides* que sirve para calcularlos. La idea fundamental del algoritmo consiste en aplicar repetidamente el resultado contenido en el siguiente ejercicio.

Ejercicio. *Si $R(x)$ es el resto de $P(x)/Q(x)$, entonces* $\text{m.c.d.}[P(x), Q(x)] = \text{m.c.d.}[Q(x), R(x)]$.

El algoritmo de Euclides para calcular $D(x)$, $M(x)$, $P_1(x)$ y $Q_1(x)$ consta de los siguientes pasos.

1. *Cálculo del MCD.* Suponiendo que $\text{gr}[P(x)] \geq \text{gr}[Q(x)]$, efectuamos una cadena de divisiones que empieza por $P(x)/Q(x)$ y acaba en una división exacta. Tras realizar cualquier división no exacta de esa cadena, en la siguiente división hay que dividir el divisor anterior entre el resto anterior. El resto normalizado de la última división no exacta es $D(x)$.
2. *Cálculo del MCM.* $M(x) = \frac{P(x) \cdot Q(x)}{p_n \cdot q_m \cdot D(x)}$.
3. *Cálculo de la identidad de Bèzout.* Seguimos la cadena en orden inverso. Ver ejemplo.

Ejemplo. *Dados $P(x) = x^5 - 32$ y $Q(x) = x^3 - 8$, calcular $D(x)$, $M(x)$, $P_1(x)$ y $Q_1(x)$.*

1. Cálculo del MCD. *Obtenemos la siguiente cadena de divisiones.*
   - *Primera: En $P(x)/Q(x)$, el cociente es $C_1(x) = x^2$ y el resto es $R_1(x) = 8x^2 - 32$.*
   - *Segunda: En $Q(x)/R_1(x)$, el cociente es $C_2(x) = x/8$ y el resto es $R_2(x) = 4x - 8$.*
   - *Tercera: En $R_1(x)/R_2(x)$, el cociente es $C_3(x) = 2x + 4$ y el resto es $R_3(x) = \mathbf{0}$.*

   Por tanto, $D(x) = R_2(x)/4 = x - 2$.
2. Cálculo del MCM. $M(x) = \frac{P(x) \cdot Q(x)}{D(x)} = (x^5 - 32) \cdot (x^2 + 2x + 4) = x^7 + 2x^6 + 4x^5 - 32x^2 - 64x - 128$.
3. Cálculo de la identidad de Bèzout. *Usando las divisiones anteriores en orden inverso, queda*

$$\begin{aligned} R_2(x) &= Q(x) - R_1(x) \cdot C_2(x) \\ &= Q(x) - \big(P(x) - Q(x) \cdot C_1(x)\big) \cdot C_2(x) \\ &= -C_2(x) \cdot P(x) + \big(1 + C_1(x) \cdot C_2(x)\big) \cdot Q(x). \end{aligned}$$

   Si dividimos esta igualdad entre cuatro, obtenemos

$$D(x) = R_2(x)/4 = P_1(x) \cdot P(x) + Q_1(x) \cdot Q(x)$$

   donde $P_1(x) = -C_2(x)/4 = -x/32$ y $Q_1(x) = \big(1 + C_1(x) \cdot C_2(x)\big)/4 = 1/4 + x^3/32$.

Problemas relacionados. *5 y 7.*

Raíces de un polinomio. Dado un polinomio no nulo $P(x) \in \mathbb{K}[x]$, decimos que el número $\alpha \in \mathbb{K}$ es una *raíz* de $P(x)$ cuando $P(\alpha) = 0$. La raíz α tiene (o es de) *multiplicidad* k cuando

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \qquad P^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

Las raíces de multiplicidad uno, se denominan *simples*, las de multiplicidad dos, *dobles*, etc.

Sean $\alpha \in \mathbb{K}$ y $P(x) \in \mathbb{K}[x]$. Los siguientes resultados son básicos.

- *Teorema de Ruffini:* α es una raíz de $P(x) \iff x - \alpha \,\big|\, P(x)$.

- *Fórmula de Taylor:* Si $n = \text{gr}[P(x)]$, entonces
$$P(x) = P(\alpha) + P'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2}(x-\alpha)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{P^{(j)}(\alpha)}{j!}(x-\alpha)^j.$$
(Más aún, los polinomios $1, x-\alpha, \ldots, (x-\alpha)^n$ forman una base de $\mathbb{K}_n[x]$.)
- α es una raíz de $P(x)$ de multiplicidad $k \iff (x-\alpha)^k \mid P(x)$ & $(x-\alpha)^{k+1} \nmid P(x)$.

A partir de estos resultados, se puede deducir la siguiente propiedad. Dado un polinomio $P(x) \in \mathbb{K}[x]$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{K}$ son raíces de multiplidades $k_1, \ldots, k_l \in \mathbb{N}$ de $P(x)$ si y sólo si $\exists\, Q(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que
- $P(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_l)^{k_l} \cdot Q(x)$
- $Q(\alpha_1), \ldots, Q(\alpha_l) \neq 0$.

Conviene recordar dos consecuencias importantes de la última propiedad:
- Un polinomio de grado n no puede tener más de n raíces contadas con multiplicidad.
- Si dos polinomios de $\mathbb{K}_n[x]$ tienen el mismo valor en $n+1$ puntos, entonces son iguales.

La expresión *contadas con multiplicidad* significa que una raíz de multiplicidad k se cuenta k veces.

Un truco para encontrar raíces de polinomios con coeficientes enteros es que si $\alpha = \frac{n}{d} \in \mathbb{Q}$ es una raíz racional (no simplificable) de un polinomio $Q(x) = q_0 + \cdots + q_m x^m \in \mathbb{Z}[x]$, entonces $n \mid q_0$ y $d \mid q_m$.

EJERCICIO. *Probar la afirmación anterior.*

EJEMPLO. *Queremos encontrar todas las raíces del polinomio $P(x) = 3x^3 - 19x^2 + 36x - 10$. Sus posibles raíces racionales son ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm 1/3$, $\pm 2/3$, $\pm 5/3$ y $\pm 10/3$. Tras comprobarlo, tan sólo $\alpha = 1/3$ es raíz. Las otras raíces forman un pareja compleja conjugada: $z = 3 + \mathrm{i}$ y $\bar{z} = 3 - \mathrm{i}$.*

PROBLEMAS RELACIONADOS. *2, 3, 4, 8, 9, 11, 12 y 14.*

Polinomios irreducibles. El concepto de polinomios irreducibles es similar al concepto de números enteros primos. Un entero $p \neq 0$ es *primo* cuando los únicos enteros que lo dividen son $\pm p$ y ± 1. La definición con polinomios no puede ser tan simple, pues los polinomios de grado cero dividen a cualquier polinomio, es decir, si $\lambda \in \mathbb{K}$ es no nulo y $P(x) \in \mathbb{K}[x]$, la división $P(x)/\lambda$ siempre es exacta.

Un polinomio $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ es *irreducible (o primo) en* $\mathbb{K}[x]$ cuando no se puede factorizar como producto de dos polinomios de $\mathbb{K}[x]$ de grado no nulo. Es decir, cuando
$$\nexists\, P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{K}[x] \text{ t.q. } P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x) \;\&\; \text{gr}[P_1(x)], \text{gr}[P_2(x)] \geq 1.$$

Las propiedades más importantes de estos polinomios son:
- Todos los polinomios de grado uno son irreducibles.
- La irreducibilidad depende del cuerpo $\mathbb{K}$. Por ejemplo, el polinomio $P(x) = x^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{R}[x]$, pero en $\mathbb{C}[x]$ es reducible, ya que $x^2 + 1 = (x + \mathrm{i}) \cdot (x - \mathrm{i})$.
- Cualquier polinomio se puede factorizar de forma única, salvo permutaciones de los factores, como producto de polinomios irreducibles. Es decir, $\forall\, P(x) \in \mathbb{K}[x]$:
$$\exists! P_1(x), \ldots, P_l(x) \in \mathbb{K}[x] \text{ irred. en } \mathbb{K}[x] \text{ y } \exists! k_1, \ldots, k_l \in \mathbb{N} \text{ t.q. } P(x) = P_1(x)^{k_1} \cdots P_l(x)^{k_l}.$$
- La factorización como producto de polinomios irreducibles se usa para calcular MCDs y MCMs:
$$\left.\begin{array}{l} P(x) = a_n \cdot R_1(x)^{k_1} \cdots R_l(x)^{k_l} \in \mathbb{K}[x] \\ Q(x) = b_m \cdot R_1(x)^{m_1} \cdots R_l(x)^{m_l} \in \mathbb{K}[x] \\ R_1(x), \ldots, R_l(x) \text{ mónicos irred. en } \mathbb{K}[x] \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{m.c.d.}[P(x), Q(x)] = R_1(x)^{i_1} \cdots R_l(x)^{i_l} \\ \text{m.c.m.}[P(x), Q(x)] = R_1(x)^{j_1} \cdots R_l(x)^{j_l} \\ i_s = \text{mín}(k_s, m_s) \text{ y } j_s = \text{máx}(k_s, m_s) \end{array}\right.$$

EJEMPLO. *Si $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = (x^2 - x + 1)(x - 2)$ y $Q(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, entonces*
$$\text{m.c.d.}[P(x), Q(x)] = x - 2 \qquad \text{m.c.m.}[P(x), Q(x)] = (x^2 - x + 1)(x-2)^2 = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 8x + 4.$$

EJERCICIO. *Probar que dados cuatro polinomios $P(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ y $Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$, entonces:*

- m.c.d.$[P(x), Q_1(x)] = 1$ *y* m.c.d.$[P(x), Q_2(x)] = 1 \Longrightarrow$ m.c.d.$[P(x), Q(x)] = 1$.
- $P(x) \mid Q(x)$ *y* m.c.d.$[P(x), Q_1(x)] = 1 \Longrightarrow P(x) \mid Q_2(x)$.
- m.c.d.$[Q_1(x), Q_2(x)] = 1$, $Q_1(x) \mid P(x)$ *y* $Q_2(x) \mid P(x) \Longrightarrow Q(x) \mid P(x)$.

A continuación, listamos los polinomios irreducibles en $\mathbb{C}[x]$. En el *Teorema Fundamental del Álgebra* se establece que cualquier polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ tiene $n = \mathrm{gr}[P(x)]$ raíces contadas con multiplicidad. Es decir, si $z_1, \ldots, z_l \in \mathbb{C}$ son todas las raíces de un polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ y sus multiplicidades son $k_1, \ldots, k_l \in \mathbb{N}$, entonces $k_1 + \cdots + k_l = n = \mathrm{gr}[P(x)]$ y, por tanto,

$$P(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_{n-1}x^{n-1} + p_n x^n = p_n \cdot (x - z_1)^{k_1} \cdots (x - z_l)^{k_l} = p_n \cdot \prod_{s=1}^{l} (x - z_s)^{k_s}.$$

Ejercicio. *Usando esa expresión, probar que* $p_{n-1} = -(k_1 z_1 + \cdots + k_l z_l) p_n$ *y* $p_0 = (-1)^n z_1^{k_1} \cdots z_l^{k_l} p_n$.

Todo lo anterior implica que: *"Los únicos polinomios irreducibles en* $\mathbb{C}[x]$ *son los polinomios de grado uno"*. En cambio, los polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$ son:

- Los polinomios de grado uno ($a_1 x + a_0$ con $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$).
- Los polinomios de grado dos y *discriminante* negativo ($\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ con $\Delta := \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$).

Este resultado es una consecuencia del siguiente hecho: *"Las raíces complejas de un polinomio real van siempre agrupadas en pares conjugados"*. Además, dada una raíz $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ vemos que

$$(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z} = x^2 - 2\,\mathrm{Re}\, z \cdot x + |z|^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \in \mathbb{R}[x]$$

luego los factores complejos de la factorización en $\mathbb{C}[x]$ de un polinomio real se pueden agrupar en parejas que se convierten en polinomios reales de grado dos y discriminante negativo.

Ejemplo. *Queremos factorizar el polinomio* $P(x) = x^4 + 1$ *en* $\mathbb{R}[x]$. *Primero lo factorizamos en* $\mathbb{C}[x]$. *Las raíces de* $P(x)$ *son las raíces cuartas de* $z = -1 = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}}$, *a saber,*

$$\begin{aligned}
z_0 &= \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/4} = \cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + \mathrm{i}\sqrt{2}/2 \\
z_1 &= \mathrm{e}^{3\pi \mathrm{i}/4} = \cos(3\pi/4) + \mathrm{i}\sin(3\pi/4) = -\sqrt{2}/2 + \mathrm{i}\sqrt{2}/2 \\
z_2 &= \mathrm{e}^{5\pi \mathrm{i}/4} = \cos(5\pi/4) + \mathrm{i}\sin(5\pi/4) = -\sqrt{2}/2 - \mathrm{i}\sqrt{2}/2 \\
z_3 &= \mathrm{e}^{7\pi \mathrm{i}/4} = \cos(7\pi/4) + \mathrm{i}\sin(7\pi/4) = \sqrt{2}/2 - \mathrm{i}\sqrt{2}/2.
\end{aligned}$$

Por tanto, $P(x) = (x - z_0)(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)$. *Para factorizar en* $\mathbb{R}[x]$, *agrupamos estas raíces en pares complejos conjugados:* z_0 *con* $z_3 = \bar{z}_0$ *y* z_1 *con* $z_2 = \bar{z}_1$. *Entonces*

$$P(x) = (x - z_0)(x - \bar{z}_0)(x - z_1)(x - \bar{z}_1) = \big(x^2 - \sqrt{2}x + 1\big)\big(x^2 + \sqrt{2}x + 1\big).$$

Problemas relacionados. *1, 6 y 13.*

Matrices

Introducción. Una *matriz* de m filas y n columnas con elementos en el cuerpo $\mathbb{K}$ es un rectángulo de elementos de $\mathbb{K}$ (es decir, números) del tipo

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

El elemento a_{ij} está en la fila i y la columna j. Notaremos por $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ al conjunto de todas estas matrices. Las matrices son *reales* cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y *complejas* cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Matrices cuadradas. Si $m = n$, la matrices son *cuadradas*. $M_n(\mathbb{K}) = M_{n\times n}(\mathbb{K})$ es el conjunto de matrices cuadradas de orden n con elementos en $\mathbb{K}$. Las matrices cuadradas más importantes son las

- *Diagonales*, cuando $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.
- *Triangulares superiores*, cuando $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.
- *Triangulares inferiores*, cuando $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$.
- *Simétricas*, cuando $a_{ij} = a_{ji}$.

Operaciones con matrices. Las operaciones básicas con matrices son las siguientes.

- *Producto de escalar por matriz.* Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, su producto $C = (c_{ij}) = \lambda \cdot A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ se calcula haciendo $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.
- *Suma de matrices.* Dadas dos matrices $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$ y $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}$, su suma $S = (s_{ij}) = A + B \in M_{m\times n}$ se calcula haciendo $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
- *Producto de matrices.* Dadas dos matrices $A = (a_{ik}) \in M_{m\times n}$ y $B = (b_{kj}) \in M_{n\times l}$, su producto $P = (p_{ij}) = AB \in M_{m\times l}$ se calcula haciendo

  $$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

  El elemento p_{ij} es el producto escalar de fila i de la matriz A y la columna j de la matriz B. Por eso un producto de matrices sólo tiene sentido cuando la primera matriz tiene tantas columnas como filas la segunda.
- *Transpuesta de una matriz.* Dada $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$, su transpuesta $A^\top = (\alpha_{ij}) \in M_{n\times m}$ se calcula haciendo $\alpha_{ij} = a_{ji}$. Por tanto, las matrices simétricas cumplen $A^\top = A$.

A continuación, se listan las propiedades más importantes de estas operaciones.

- $\big(M_{m\times n}(\mathbb{K}), +, \cdot\big)$ es un $\mathbb{K}$-ev de dimension mn.
- El elemento neutro de la suma de matrices es la matriz nula: $\mathbf{0}$.
- El elemento neutro del producto de matrices es la matriz identidad: Id.
- Propiedad asociativa combinada: $\lambda \cdot (AB) = (\lambda \cdot A)B = A(\lambda \cdot B)$.
- El producto de matrices es asociativo: $(AB)C = A(BC)$.
- El producto de matrices **no** es conmutativo.
- El producto de matrices **no** tiene la propiedad del elemento inverso.

- Propiedad distributiva del producto de matrices: $A(B+C) = AB + AC$ y $(A+B)C = AC + BC$.
- La transpuesta de la transpuesta es la matriz inicial: $(A^\top)^\top = A$.
- La transpuesta de la suma es la suma de transpuestas: $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$.
- La transpuesta del producto es el producto (permutado) de transpuestas: $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Ejercicio. *Encontrad ejemplos que pongan de manifiesto las siguientes afirmaciones.*

1. $AB \neq BA$.
2. $AB = \mathbf{0}$ *no implica que* $A = \mathbf{0}$ *o* $B = \mathbf{0}$. *Más aún,* $A^2 = \mathbf{0}$ *no implica que* $A = \mathbf{0}$.
3. $AC = BC$ *con* $C \neq \mathbf{0}$ *no implica* $A = B$.

Problema relacionado. *12.*

Rango de una matriz. El *rango* de una matriz A se puede definir de tres formas equivalentes:

- Es el número de columnas li de A.
- Es el número de filas li de A.
- Es el máximo orden de los menores de A con determinante no nulo.

(Para saber que es un menor consultar el tema *Determinantes.*)

En particular, una matriz y su transpuesta siempre tienen el mismo rango: $\operatorname{rango} A = \operatorname{rango} A^\top$.

El rango es importante en la resolución de sistemas lineales. Por tanto, necesitamos algún método para calcularlo. Uno de los mejores consiste en saber que el rango de una matriz no cambia al efectuar *transformaciones elementales por filas*, a saber:

- Permutar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
- Sumar a una fila una cl de las restantes.

Cuando una matriz A se pueda convertir en otra matriz B mediante transformaciones elementales, escribiremos $A \sim B$. (Aunque sean útiles, evitaremos las *transformaciones elementales por columnas.*)

El método para calcular el rango de una matriz A se basa en convertirla mediante una cadena de transformaciones elementales en una matriz del tipo

$$E_r = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & x_1 & & & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & x_2 & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & x_3 & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & x_r & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

donde los elementos $x_1, \ldots, x_r$ son no nulos, los elementos situados sobre los puntos son nulos y el resto no importan. Estas matrices se llaman *r-escalonadas*, siendo r es el número de escalones. *Ojo: En una matriz escalonada, no puede haber escalones con más de una fila.* Finalmente,

$$A \sim E_r \Longrightarrow \operatorname{rango} A = \operatorname{rango} E_r = r.$$

Ejemplo. *Escribimos los pivotes en negrita y los elementos que vamos a matar en itálica:*

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 3 & 1 \\ \mathit{2} & -2 & 6 & 3 \\ \mathit{1} & -1 & 3 & 0 \\ \mathit{1} & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & -\mathit{1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego $\operatorname{rango} A = 3$. *Hemos empezado colocando ceros en la primera columna con tres transformaciones simultáneas:* $f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1$, $f_3 \leftarrow f_3 - f_1$ *y* $f_4 \leftarrow f_4 - f_1$. *Después, hemos permutado las tres últimas filas:* $(f_2, f_3, f_4) \leftarrow (f_4, f_2, f_3)$. *Finalmente, hemos colocado un cero en la cuarta columna:* $f_4 \leftarrow f_4 + f_3$.

Ejercicio. *Vamos a "demostrar" que no hay ninguna matriz 2×2 de rango dos:*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha+\gamma & \beta+\delta \\ \gamma+\alpha & \delta+\beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha+\gamma & \beta+\delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{rango } A \leq 1.$$

¿Qué falla en esta "demostración"?

Sistemas matriciales. El *sistema lineal clásico* de m ecuaciones y n incógnitas

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

se puede escribir en forma compacta como $Ax = b$ en términos de

- *La matriz del sistema:* $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$.
- *El vector de incógnitas:* $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$.
- *El término independiente:* $b = (b_1, \dots, b_m)^\top$.

Otra forma muy útil de escribir el sistema anterior es

$$x_1 \cdot a_1 + \cdots + x_n \cdot a_n = b$$

donde $a_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})^\top \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$ es la j-ésima columna de la matriz A. Es decir, resolver un sistema lineal clásico consiste en encontrar todas las cl's de las columnas de la matriz del sistema que son iguales al término independiente. Los coeficientes de las cl's son las soluciones del sistema.

Ejercicio. *Sea $V = (v_1, \dots, v_n)$ una base de $\mathbb{R}^n$ y construimos una matriz cuadrada A poniendo estos vectores por columnas. Sea $b \in \mathbb{R}^n \simeq M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Ver que la solución del sistema $Ax = b$ son las coordenadas del vector b en la base V.*

Los sistemas lineales clásicos son casos particulares de los *sistemas lineales matriciales*

$$AX = B$$

donde las matrices $A \in M_{m\times n}$ y $B \in M_{m\times p}$ son datos del problema, mientras que la matriz $X \in M_{n\times p}$ es la incógnita. Las matrices envueltas en la ecuación $AX = B$ deben cumplir que:

- A tiene tantas columnas como X filas.
- A y B tienen el mismo número de filas.
- X y B tienen el mismo número de columnas.

Una forma de recordar esto, consiste en escribir que $(m \times n) \cdot (n \times p) \equiv m \times p$.

Aquellos que sientan fobia por los sistemas matriciales, podrán entenderlos mejor recordando que un sistema matricial es equivalente a varios clásicos: si $b_1, \dots, b_p \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$ son las columnas de la matriz B y $x_1, \dots, x_p \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$ son las columnas de la matriz X, entonces

$$AX = B \Longleftrightarrow Ax_k = b_k \quad k = 1, \dots, p.$$

Ejercicio. *Entender bién esta equivalencia.*

Sin embargo, para calcular rápido es mejor trabajar directamente con los sistemas matriciales.

Un sistema matricial $AX = B$ se denomina

- *homogéneo*, cuando $B = \mathbf{0}$.
- *incompatible*, cuando no tiene ninguna solución.
- *compatible determinado*, cuando tiene una única solución.
- *compatible indeterminado*, cuando tiene más de una solución.

Cuando un sistema $AX = B$ es compatible, su *grado de libertad* es el número de parámetros libres que aparecen al escribir todas sus soluciones. También es la dimensión del sev formado por la soluciones del sistema homogéneo $AX = \mathbf{0}$. El grado de libertad de un sistema determinado siempre es cero.

Problema relacionado. *13. (Tras el tema* Determinantes*, este problema será más simple.)*

El teorema de Rouché. El *Teorema de Rouché* clasifica los sistemas matriciales en términos del rango de la matriz del sistema A y del rango de la *matriz ampliada* $(A|B)$. Antes de enunciarlo, resolveremos tres sistemas lineales clásicos diferentes que cubren todas posibilidades que existen.

Ejemplo. *Resolver el sistema lineal* $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 4z & = & 2 \\ x & & & + & z & = & 2 \end{array}\right\}.$

Efectuamos las transformaciones elementales por filas necesarias para escalonar la matriz ampliada.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Este sistema es incompatible. Observamos que en este caso $\boxed{2 = \operatorname{rango} A < \operatorname{rango}(A|b) = 3}$.

Ejemplo. *Resolver el sistema lineal* $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 4z & = & 2 \\ 2x & - & y & & & = & 3 \end{array}\right\}.$

Efectuamos las transformaciones elementales por filas necesarias para escalonar la matriz ampliada.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 5/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{array}\right).$$

Este sistema es compatible y determinado. La solución es $x = \frac{5}{4}$, $y = -\frac{1}{2}$ *y* $z = -\frac{1}{4}$. *Observamos que en este caso* $\boxed{\operatorname{rango} A = \operatorname{rango}(A|b) = 3 = \#\operatorname{col} A}$.

Ejemplo. *Resolver el sistema lineal* $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 4z & = & 2 \\ x & & & + & z & = & 1 \end{array}\right\}.$

Efectuamos las transformaciones elementales por filas necesarias para escalonar la matriz ampliada.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Este sistema es compatible e indeterminado. Las soluciones son $x = 1 - z$, $y = 2z$ *y* $z \in \mathbb{R}$ *libre. El grado de libertad de este sistema es uno, pues las soluciones dependen de un único parámetro:* z. *Observamos que en este caso* $\boxed{2 = \operatorname{rango} A = \operatorname{rango}(A|b) < \#\operatorname{col} A = 3}$.

Es interesante remarcar que el conjunto de soluciones de un sistema compatible indeterminado se puede expresar de infinitas formas, todas ellas correctas.

Ejercicio. *Comprobar que en el sistema anterior se podrían haber efectuado las transformaciones elementales de modo que el parámetro libre sea la incógnita* x. *Ídem, con la incógnita* y.

Ejercicio. *El sistema* $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ 3x & - & 2y & + & 6z & = & 3 \end{array}\right\}$ *también tiene un grado de libertad. Comprobar que su conjunto de soluciones no puede expresarse usando la incógnita* x *como parámetro libre.*

Ahora ya podemos dar el resultado final, sin excesivas sorpresas. Recordando que n es el número de columnas de A y p es el número de columnas de B, el sistema $AX = B$ es:

- Incompatible, cuando $\operatorname{rango} A < \operatorname{rango}(A|B)$.
- Compatible determinado, cuando $\operatorname{rango} A = \operatorname{rango}(A|B) = n$.
- Compatible indeterminado, cuando $r = \operatorname{rango} A = \operatorname{rango}(A|B) < n$. En este caso, el grado de libertad del sistema es igual a $(n - r)p$.

Ejercicio. *Sea $V = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de $\mathbb{R}^n$ y construimos una matriz cuadrada B poniendo estos vectores por columnas. Sea $W = (w_1, \ldots, w_n)$ otra base de $\mathbb{R}^n$ y construimos una segunda matriz cuadrada A haciendo lo mismo que antes. Ver que el sistema $AX = B$ es compatible determinado y que su solución X es la matriz del cambio de base que pasa de la base V a la base W: $X = C_W^V$.*

Hay otros sistemas matriciales. Son los sistemas del tipo

$$YC = D$$

donde las matrices $C \in M_{n\times m}$ y $D \in M_{p\times m}$ son datos del problema, mientras que la matriz $Y \in M_{p\times n}$ es la incógnita. Estos sistemas se resuelven convirtiéndolos en sistemas del tipo $AX = B$ mediante transposición: $A = C^\top \in M_{m\times n}$, $B = D^\top \in M_{m\times p}$ y $X = Y^\top \in M_{n\times p}$. Una vez obtenida la solución X del sistema transpuesto, la solución del sistema original es $Y = X^\top$.

El método de Gauss para resolver sistemas. Uno de los más eficientes y simples para resolver un sistema matricial $AX = B$ es el *método de Gauss* (o *método del pivote*). Consiste en simplificar la matriz ampliada $(A|B)$ mediante transformaciones elementales por filas hasta conseguir escalonarla. Si la matriz ampliada transformada tiene más escalones que la matriz del sistema transformada, entonces $\operatorname{rango} A < \operatorname{rango}(A|B)$ y el sistema es incompatible. De lo contrario, seguimos simplificando el sistema mediante más transformaciones elementales y eliminamos las filas nulas hasta llegar a una de las siguientes situaciones. (En el segundo caso, es posible que la matriz identidad aparezca descolocada pero siempre se puede ordenar. Es decir, puede suceder que las r columnas de la izquierda no puedan transformarse —por filas— en la matriz identidad, en cuyo caso hay que encontrar otro grupo de r columnas que si se pueda.)

- Si $(A|B) \sim \cdots \sim (\mathrm{Id}|C)$, el sistema $AX = B$ es compatible determinado.
- Cuando $(A|B) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccccccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & s_{1r+1} & s_{1r+2} & \cdots & s_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & s_{2r+1} & s_{2r+2} & \cdots & s_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & s_{rr+1} & s_{rr+2} & \cdots & s_{rn} & c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rp} \end{array}\right)$,
  el sistema $AX = B$ es compatible indeterminado con $(n-r)p$ grados de libertad.

En el primer caso, la (única) solución del sistema es $X = C$. En el segundo caso, el conjunto de todas las soluciones del sistema se puede escribir así:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_{ij} = c_{ij} - \sum_{k=r+1}^{n} s_{ik} x_{kj} & \text{si } i = 1, \ldots, r \\ x_{ij} \in \mathbb{K} & \text{si } i = r+1, \ldots, n \end{cases}$$

Ejercicio. *¿Cómo se escriben las soluciones si la matriz identidad está descolocada en el segundo caso?*

Problemas relacionados. *1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 14.*

Matrices invertibles. Si A es una matriz $n \times n$, las siguientes condiciones son equivalentes:

- El sistema $AX = \mathrm{Id}_n$ tiene alguna solución.
- El sistema $XA = \mathrm{Id}_n$ tiene alguna solución.
- La matriz A tiene rango máximo: $\operatorname{rango} A = n$.
- El sistema $AX = B$ es compatible determinado para toda matriz B.
- El sistema $XA = B$ es compatible determinado para toda matriz B.
- La matriz A tiene determinante no nulo: $\det A \neq 0$. (Se verá en el tema *Determinantes.*)
- Todos los VAPs de la matriz A son no nulos: $0 \notin \sigma(A)$. (Se verá en el tema *Diagonalización.*)

Ejercicio. *Probar que las cinco primeras condiciones son equivalentes.*

Cuando alguna de estas condiciones se cumple, los sistemas $AX = \mathrm{Id}_n$ y $XA = \mathrm{Id}_n$ tienen la misma (y única) solución. Esta solución recibe el nombre de *matriz inversa* de A y se escribe A^{-1}. También se dice que la matriz inicial es *invertible* o que *tiene inversa*.

Si A es invertible, la solución de $AX = B$ es $X = A^{-1}B$ y la solución de $XA = B$ es $X = BA^{-1}$.

Las propiedades fundamentales de las inversas son las siguientes.

- La inversa de la inversa es la matriz inicial: Si A es invertible, A^{-1} también lo es y $(A^{-1})^{-1} = A$.
- La inversa de la transpuesta es la transpuesta de la inversa: Si A es invertible, $A^\top$ también lo es y $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.
- La inversa del producto es el producto (permutado) de inversas: Si A y B son invertibles, AB también lo es y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Si A y AB son invertibles, B también lo es. Si B y AB son invertibles, A también lo es.

EJERCICIO. *Probar que si A es invertible y $k \in \mathbb{Z}$, A^k también lo es y $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.*

EJERCICIO. *Comprobar que si $A^{k+1} = \mathbf{0}$ para algún $k \in \mathbb{N}$, la matriz $\mathrm{Id} - A$ es invertible y su inversa es*

$$(\mathrm{Id} - A)^{-1} = \mathrm{Id} + A + A^2 + \cdots + A^k.$$

Los dos formas más cómunes para calcular la inversa de una matriz invertible son:

- *El método de Gauss.* Consiste en resolver el sistema $AX = \mathrm{Id}$ pivotando:

  $$(A|\mathrm{Id}) \sim \cdots \sim (\mathrm{Id}|A^{-1}).$$

  La matriz A es invertible si y sólo si es posible transformar $(A|\mathrm{Id})$ en la matriz ampliada final.
- *El método de Cramer.* Consiste en resolver el sistema $AX = \mathrm{Id}$ por la regla de Cramer:

  $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\mathrm{Adj}\, A)^\top.$$

  (Se verá en el tema *Determinantes*.)

EJERCICIO. *Probar que:*

- *La inversa de una matriz triangular (superior o inferior) es triangular (superior o inferior).*
- *La inversa de una matriz diagonal es diagonal.*
- *La inversa de una matriz simétrica es simétrica.*

PROBLEMAS RELACIONADOS. *3 y 11.*

Espacios Vectoriales

Ev. En todo el curso $\mathbb{K}$ es un cuerpo. Podeis pensar que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Un conjunto no vacio E es un $\mathbb{K}$-*espacio vectorial* (o abreviadamente, un $\mathbb{K}$-*ev)* cuando existan dos operaciones, denominadas *suma de vectores (+)* y *producto de escalar por vector (·)* tales que:

- La suma de vectores es asociativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$ para todos $u, v, w \in E$.
- La suma de vectores es conmutativa: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in E$.
- La suma de vectores tiene elemento neutro: Existe $\mathbf{0} \in E$ tal que $u+\mathbf{0} = u$ para todo $u \in E$.
- También tiene elemento opuesto: Para todo $u \in E$, existe un $(-u) \in E$ tal que $u+(-u) = \mathbf{0}$.
- El producto de escalar por vector es distributivo respecto
  - la suma de vectores: $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y para todos $u, v \in E$.
  - la suma de escalares: $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y para todo $u \in E$.
- $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y para todo $u \in E$.
- El producto de escalar por vector tiene elemento neutro: $1 \cdot u = u$ para todo $u \in E$.

A los elementos de E los llamaremos *vectores* y usualmente los notaremos con las últimas letras minúsculas del alfabeto romano: $\ldots, u, v, w, x, y, z$. A los elementos de $\mathbb{K}$ los llamaremos *escalares* y usualmente los notaremos con letras minúsculas del alfabeto griego: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \ldots$.

Conviene observar que aparecen dos elementos neutros: el escalar $0 \in \mathbb{K}$ y el vector $\mathbf{0} \in E$. Además:

- $0 \cdot u = \mathbf{0}$ para todo $u \in E$.
- $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.
- Si $\alpha \cdot u = \mathbf{0}$, entonces $\alpha = 0$ o $u = \mathbf{0}$.

Ejercicio. *Probar estas propiedades.*

Los principales ejemplos de ev son los siguientes.

- *El plano euclídeo* $\mathbb{R}^2$. Es un $\mathbb{R}$-ev con las operaciones
$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \implies x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
$$\alpha \in \mathbb{R},\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \implies \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$
Esta suma de vectores es la regla del paralelogramo.
- *El espacio* $\mathbb{K}^n$. Es un $\mathbb{K}$-ev con las operaciones
$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n,\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n \implies x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\alpha \in \mathbb{K},\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \implies \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$
- *El espacio* $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ *de todas las matrices con* m *filas y* n *columnas con elementos en* $\mathbb{K}$. Es un $\mathbb{K}$-ev con las operaciones
$$A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K}),\ B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) \implies C = A + B = (c_{ij}), c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$
$$\alpha \in \mathbb{K},\ A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) \implies D = \alpha \cdot A = (d_{ij}), d_{ij} = \alpha a_{ij}.$$
- *El espacio* $\mathbb{K}_n[x]$ *de todos los polinomios de grado menor o igual que* n *con coeficientes en* $\mathbb{K}$. Es un $\mathbb{K}$-ev con las operaciones
$$P(x) = \textstyle\sum_{j=0}^n p_j x^j \in \mathbb{K}_n[x],\ Q(x) = \sum_{j=0}^n q_j x^j \in \mathbb{K}_n[x] \implies P(x) + Q(x) = \sum_{j=0}^n (p_j + q_j) x^j$$
$$\alpha \in \mathbb{K},\ P(x) = \textstyle\sum_{j=0}^n p_j x^j \in \mathbb{K}_n[x] \implies \alpha \cdot P(x) = \sum_{j=0}^n \alpha p_j x^j.$$
- *El espacio* $\mathbb{K}[x]$ *de todos los polinomio con coeficientes en* $\mathbb{K}$ también es un $\mathbb{K}$-ev.

- *El espacio $F(\mathbb{R};\mathbb{R})$ de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.* Es un $\mathbb{R}$-ev con las operaciones

$$f:\mathbb{R}\ni x\mapsto f(x)\in\mathbb{R},\ g:\mathbb{R}\ni x\mapsto g(x)\in\mathbb{R} \implies f+g:\mathbb{R}\ni x\mapsto f(x)+g(x)\in\mathbb{R}$$
$$\alpha\in\mathbb{R},\ f:\mathbb{R}\ni x\mapsto f(x)\in\mathbb{R} \implies \alpha\cdot f:\mathbb{R}\ni x\mapsto \alpha f(x)\in\mathbb{R}.$$

EJERCICIO. *Probar que $E=\mathbb{R}^n_+=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1,\dots,x_n>0\}$ es un $\mathbb{R}$-ev con las operaciones*

$$x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n_+,\ y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n_+ \implies x+y=(x_1\times y_1,\dots,x_n\times y_n)$$
$$\alpha\in\mathbb{R},\ x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n_+ \implies \alpha\cdot x=(x_1^\alpha,\dots,x_n^\alpha).$$

Indicación: El elemento neutro de esta "suma de vectores" es el vector $\mathbf{1}=(1,\dots,1)\in\mathbb{R}^n_+$.

Cl y sev. Un vector u de un $\mathbb{K}$-ev E es una *combinación lineal (cl)* de unos vectores $v_1,\dots,v_n\in E$ cuando existan unos escalares $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{K}$ tales que $u=\alpha_1\cdot v_1+\cdots+\alpha_n\cdot v_n=\sum_{j=1}^n\alpha_j v_j$. Los escalares $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ son los *coeficientes de la cl*. La cl es *trivial* cuando todos sus coeficientes son nulos.

EJERCICIO. *Sean $u=(0,1,0)$, $u'=(1,2,4)$, $v_1=(1,0,0)$ y $v_2=(1,2,0)$ cuatro vectores de $\mathbb{R}^3$. Ver que u se puede poner como una cl de v_1 y v_2, pero u' no.*

Un subconjunto no vacio F de un $\mathbb{K}$-ev E es un *subespacio vectorial* (o abreviadamente, un *sev*) de E cuando cumpla el siguiente par de propiedades:

1. $u,v\in F\Rightarrow u+v\in F$.
2. $\alpha\in\mathbb{K},\ u\in F\Rightarrow \alpha\cdot u\in F$.

EJERCICIO. *Probar que si F es un sev, entonces $\mathbf{0}\in F$.*

EJERCICIO. *Probar que F es un sev si y sólo si: $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, $u,v\in F\Rightarrow\alpha u+\beta v\in F$. Mejor aún, probar que un subconjunto F es un sev si y sólo si cualquier cl de vectores de F sigue estando dentro de F.*

A continuación, damos algunos ejemplos de subconjuntos que son (o no son) sev.

- $F=\{\mathbf{0}\}$ es el menor sev de cualquier ev E.
- $F=E$ es el mayor sev de cualquier ev E.
- $F=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : x_1+x_3=0\}$ es un sev de $E=\mathbb{R}^3$.
- $F=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : x_1+x_3=1\}$ no es un sev de $E=\mathbb{R}^3$.
- $F=\{A\in M_2(\mathbb{R}) : \operatorname{traza} A=0\}$ es un sev de $E=M_2(\mathbb{R})$.
- $F=\{A\in M_2(\mathbb{R}) : \det A=0\}$ no es un sev de $E=M_2(\mathbb{R})$.
- $F=\{P(x)\in\mathbb{K}_n[x] : P'(3)=0\}$ es un sev de $E=\mathbb{K}_n[x]$.
- $F=\mathbb{K}_n[x]$ es un sev de $E=\mathbb{K}[x]$. Si $m>n$, $F=\mathbb{K}_n[x]$ también es un sev de $E=\mathbb{K}_m[x]$.
- $F=C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})=\{f\in F(\mathbb{R};\mathbb{R}) :\ f \text{ es continua}\}$ es un sev de $E=F(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

De los ejemplos que no son sev, en el primero $\mathbf{0}\notin F$ (es decir, la ecuación $x_1+x_3=1$ no es *homogénea*), mientras que en el segundo la ecuación $\det A=0$ no es *lineal*. Veremos más adelante que las ecuaciones de un sev siempre son lineales y homogéneas.

PROBLEMA RELACIONADO. *1.*

EJERCICIO. *Sean $v_1=(1,2,0)$ y $v_2=(1,0,0)$. Comprobar que el subconjunto $F\subset\mathbb{R}^3$ formado por todas las cl posibles de v_1 y v_2 es un sev de $E=\mathbb{R}^3$.*

Si S es un conjunto de vectores de un $\mathbb{K}$-ev E, notaremos por $[S]$ al subconjunto de E formado por todas las cl posibles de vectores de S. Así pues, un vector $u\in E$ es una cl de unos vectores $v_1,\dots,v_r\in E$ si y sólo si $u\in[v_1,\dots,v_r]$. $[S]$ siempre es un sev de E. Llamaremos a $[S]$ el *sev generado por S* y a los vectores de S unos *generadores* del sev $[S]$.

EJERCICIO. *Comprobar que $[S]$ es el menor sev de E que contiene a S.*

EJERCICIO. *Si $F=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : x_1+x_3=0\}$ y $G=[(1,0,-1),(0,1,0)]$, entonces $G\subset F$.*

Cuando $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ (es decir, S contiene un número finito de vectores), entonces

$$[S] = \{\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_m \cdot v_m : \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}\}.$$

En particular,

- $E = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,0,0)(1,2,0)\} \Rightarrow [S] \neq E$.
- $E = \mathbb{K}^n$, $S = \{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)\} \Rightarrow [S] = E$.
- $E = M_2(\mathbb{K})$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow [S] = E$.
- $E = \mathbb{K}_n[x]$, $S = \{1, x, \ldots, x^n\} \Rightarrow [S] = E$.
- $E = \mathbb{K}[x]$, $S = \{1, x, \ldots, x^n, \ldots\} \Rightarrow [S] = E$.

Ejercicio. *Sea $S = \{(\mathrm{e},1,\ldots,1),(1,\mathrm{e},\ldots,1),\ldots,(1,\ldots,1,\mathrm{e})\} \subset \mathbb{R}^n_+$. Comprobar que $[S] = \mathbb{R}^n_+$.*

Vectores li, vectores generadores, bases y dimensiones. Un conjunto $S \subset E$ es

- *Linealmente independiente (li)* en E cuando la única cl de sus vectores que se anula es trivial.
- *Linealmente dependiente (ld)* en E cuando existen cl no triviales de sus vectores que se anulan.
- *Generador* de E cuando cualquier vector de E se puede escribir como una cl de sus vectores.
- *Base* de E cuando es simultáneamente li y generador. (O equivalentemente, cuando cualquier vector de E se puede escribir de forma única como una cl de sus vectores.)

Todos los ev tienen bases, pero no lo vamos a demostrar.

Ejemplo. *Sean $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,1,1)$ y $v_4 = (2,2,1)$ vectores de $E = \mathbb{R}^3$. Entonces:*

1. *$\{v_2, v_3\}$ es li, pero $\{v_2, v_3, v_4\}$ es ld.*
2. *$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ genera E, pero $\{v_2, v_3, v_4\}$ no.*
3. *$\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de E.*

Las propiedades más simples relacionadas con la independencia lineal son las siguientes.

- Un conjunto es ld si y sólo si alguno de sus elementos es una cl de otros elementos del conjunto.
- Cualquier subconjunto de un conjunto li también es li: S es li y $T \subset S \Rightarrow T$ es li.
- S es li $\Rightarrow \mathbf{0} \notin S$.
- $S = \{u\}$ es li $\Leftrightarrow u \neq \mathbf{0}$.
- $S = \{u_1, u_2\}$ es ld $\Leftrightarrow$ alguno de los vectores u_1, u_2 es un múltiplo del otro.

Ejercicio. *Probar las propiedades anteriores.*

Ejercicio. *Probar que polinomios de grados diferentes siempre son li.*

Ejercicio. *Probar que S es una base de E si y sólo si cualquier vector de E se puede escribir de forma única como una cl de sus vectores.*

Hemos dicho que al quitarle vectores a un conjunto li sigue siendo li. Así mismo, al añadirle vectores a un conjunto generador sigue siendo generador. Por otra parte, hemos comprobado mediante ejemplos que al añadirle vectores a un conjunto li puede dejar de serlo o que al quitarle vectores a un conjunto generador puede dejar de serlo. A grosso modo, esto significa que:

- Los conjuntos li no pueden ser demasiado grandes.
- Los conjuntos generadores no pueden ser demasiado pequeños.

Así pues, parece lógico que las bases, que están a medio camino entre los conjuntos li y los conjuntos generadores, deban tener un tamaño muy ajustado, que se denomina la *dimensión* del ev. Hasta ahora, todo esto es muy difuso. Falta probarlo con todos los detalles.

Empezaremos comentando las dos principales propiedades que nos relacionan conjuntos li, conjuntos generadores y bases:

- De cualquier conjunto finito de generadores se puede *extraer* una base (finita, claro).

- *Teorema de Steinitz.* Si E es un ev, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de E y $S = \{w_1, \ldots, w_m\}$ un conjunto li en E, entonces $\exists T \subset B$ tal que $\#T = n - m \geq 0$ y $B' = S \cup T$ es una base de E.

EJERCICIO. *Demostrar el Teorema de Steinitz. (No es fácil.)*

Dado un $\mathbb{K}$-ev E, tenemos tres posibilidades para su *dimensión*.

- Si $E = \{\mathbf{0}\}$, diremos que E tiene dimensión *cero*: $\dim_{\mathbb{K}} E = 0$.
- Si $E \neq \{\mathbf{0}\}$ tiene una base finita de n vectores, diremos que E tiene dimensión n: $\dim_{\mathbb{K}} E = n$.
- Si $E \neq \{\mathbf{0}\}$ no tiene ninguna base finita, diremos que E tiene dimensión *infinita*: $\dim_{\mathbb{K}} E = \infty$.

De igual modo, si F es un sev, la dimensión de F es el número de vectores que tiene las bases de F.

EJERCICIO. *La dimensión no depende de la base pues todas las bases de un ev tienen el mismo cardinal.*

EJERCICIO. *Calcular la dimensión del sev* $F = [(1,1,0),(1,1,1),(2,2,1)] \subset \mathbb{R}^3$. *(Respuesta:* $\dim F = 2$.*)*

El teorema de Steinizt se puede resumir diciendo que en los ev de dimensión finita, cualquier conjunto li se puede *ampliar* hasta formar una base.

Un ev tiene muchas bases, pero la primera opción será trabajar con la base natural (si existe). Las bases naturales de los ev euclídeos, de los ev de matrices y de los ev de polinomios son las siguientes.

- La base natural de $\mathbb{K}^n$ es $N = \{e_1, \ldots, e_n\}$, donde e_j es el vector de $\mathbb{K}^n$ cuya componente j es igual a uno y el resto son nulas. En particular, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.
- La base natural de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ es $N = \{E_{11}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{m1}, \ldots, E_{mn}\}$, donde E_{ij} es la matriz de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ con todas sus elementos nulos excepto el situado en la fila i y la columna j, que es igual a uno. En particular, $\dim_{\mathbb{K}} M_{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$.
- La base natural de $\mathbb{K}_n[x]$ es $N = \{1, x, \ldots, x^n\}$. En particular, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[x] = n + 1$.
- La base natural de $\mathbb{K}[x]$ es $N = \{1, x, \ldots, x^n, \ldots\}$. En particular, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x] = \infty$.
- La base natural de $\mathbb{C}$ considerado como $\mathbb{R}$-ev es $N = \{1, \mathrm{i}\}$. En particular, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

EJERCICIO. *Calcular* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_n[x]$. *¿Cuál sería la base natural de* $\mathbb{C}_n[x]$ *considerado como* $\mathbb{R}$*-ev?*

EJERCICIO. *Calcular* $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ *y* $\dim_{\mathbb{R}} F(\mathbb{R};\mathbb{R})$. *(Respuesta: Ambas dimensiones son infinitas.)*

PROBLEMA RELACIONADO. *16.*

A continuación, listamos las propiedades más importantes sobre conjuntos li, conjuntos generadores, bases y dimensiones. Sea E un ev de dimensión finita y sea S un conjunto de vectores de E. Entonces:

- S es li $\Rightarrow \#S \leq \dim E$ y podemos ampliar S a una base de E.
- S genera $E \Rightarrow \#S \geq \dim E$ y podemos extraer de S una base de E.
- S es li y $\#S = \dim E \Rightarrow S$ es base de E.
- S genera E y $\#S = \dim E \Rightarrow S$ es base de E.

Para acabar esta sección, listamos algunas propiedades sobre dimensiones de sev.

- Sólo el sev cero tiene dimensión cero.
- Si F es un sev de un ev E, entonces $\dim F \leq \dim E$.
- Si F es un sev de un ev E tal que $\dim F = \dim E < \infty$, entonces $F = E$.
- Si F y G son sev's de un ev E tales que $F \subset G$ y $\dim F = \dim G < \infty$, entonces $F = G$.

Las hipótesis $\dim E < \infty$ y $\dim G < \infty$ son necesarias. Por ejemplo, el sev $F = [x, x^2, \ldots, x^n, \ldots]$ del ev $E = \mathbb{R}[x]$ cumple la condición $\dim F = \dim E$, pero, en cambio, $F \neq E$.

Coordenadas en una base. En esta sección, E siempre es un ev de dimensión finita. Además, a partir de ahora, supondremos que las bases no son sólo conjuntos de vectores, sino que en tales conjuntos hay un orden y por tanto hablaremos de *bases ordenadas*.

La propiedad fundamental de cualquier base $V = (v_1, \ldots, v_n)$ de un ev E es que cualquier vector del ev se puede escribir de forma única como una cl de los vectores de la base. Es decir,

$$\forall u \in E,\ \exists!\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ tales que } u = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n.$$

Los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son las *coordenadas del vector u en la base V*. Las escribiremos en columna:

$$\overline{u}_V = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{K}).$$

Cuando no haya posibilidad de confusión, escribiremos sólo la barra sin el subíndice de la base: $\overline{u}$. A veces, para ahorrar espacio, escribiremos las coordenadas horizontalmente: $\overline{u} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^\top$.

Las bases naturales de los espacios euclideos $\mathbb{K}^n$, los espacios de polinomios $\mathbb{K}_n[x]$ y los espacios de matrices $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ son muy cómodas ya que las coordenadas de

- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en la base natural de $\mathbb{K}^n$ son las componentes del vector: $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$.
- $P = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ en la base natural de $\mathbb{K}_n[x]$ son los coeficientes del polinomio: $\overline{P} = (a_0, \ldots, a_n)^\top$.
- $A = (a_{ij})$ en la base natural de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ son los elementos de la matriz: $\overline{A} = (a_{11}, \ldots, a_{mn})^\top$.

Es muy importante entender que un vector tiene coordenadas diferentes en bases diferentes.

Ejemplo. *Tenemos el vector $x = (8, 2)$ del ev $E = \mathbb{R}^2$. Consideramos tres bases distintas de E. La base natural $N = (e_1, e_2)$, la base $W = (w_1, w_2)$ donde $w_1 = (3, 1)$ y $w_2 = (5, 1)$ y, finalmente, la base $V = (v_1, v_2)$ donde $v_1 = (1, 1)$ y $v_2 = (6, 0)$. Entonces: $\overline{x}_N = (8, 2)^\top$, $\overline{x}_W = (1, 1)^\top$ y $\overline{x}_V = (2, 1)^\top$.*

Ejemplo. *En $E = M_2(\mathbb{R})$ consideramos la base natural N y la base V formada por los vectores*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las coordenadas de $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *son* $\overline{A}_N = (-4, 1, 0, 2)^\top$ *y* $\overline{A}_V = (1, 1, -1, -1)^\top$.

Ejercicio. *Sea $V = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de E. ¿Cuáles son las coordenadas de v_j en la base V?*

Ejercicio. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Probar que $V = \big(1, x - \alpha, (x-\alpha)^2, \ldots, (x-\alpha)^n\big)$ es una base de $\mathbb{R}_n[x]$. Calcular las coordenadas de un polinomio $P(x) \in \mathbb{K}_n[x]$ en la base V. (Indicación: Taylor.)*

Cambios de base. En esta sección vamos a ver como se transforman las coordenadas de un vector en una base a sus coordenadas en otra base.

Sean $V = (v_1, \ldots, v_n)$ y $W = (w_1, \ldots, w_n)$ dos bases de un $\mathbb{K}$-ev E. Si $u \in E$, $\overline{u}_V$ y $\overline{u}_W$ son las coordenadas del vector u en esas bases. Entonces, existe una única matriz $C_W^V \in M_n(\mathbb{K})$ tal que

$$\overline{u}_W = C_W^V \overline{u}_V \qquad \forall u \in E.$$

La matriz C_W^V es la *matriz del cambio de base de la base V a la base W*. Para calcularla, basta recordar que la columna j de esta matriz son las coordenadas del vector v_j en la base W. Es decir,

$$v_j = \mu_{1j}\cdot w_1 + \cdots + \mu_{nj}\cdot w_n \Longrightarrow C_W^V = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \cdots & \mu_{nn} \end{pmatrix}.$$

Las propiedades más importantes de las matrices de cambio de base son las siguientes:

- Las matrices de cambios de base siempre son invertibles. (Ver el tema *Matrices*.)
- La matriz del cambio inverso es la inversa de la matriz del cambio: $(C_W^V)^{-1} = C_V^W$.
- La matriz del cambio compuesto es el producto de las matrices del cambio: $C_W^V = C_W^U C_U^V$.

Ejercicio. *Probar las propiedades segunda, tercera y quinta.*

Un buen truco para calcular una matriz de cambio de base que relacione dos bases no naturales V y W, consiste en usar la base natural N como puente entre las dos. Por ejemplo, $C_N^W C_W^V = C_N^V$, es decir, $C_W^V = (C_N^W)^{-1} C_N^V$. También es interesante notar que para calcular una matriz de cambio de base que relacione una base natural N y otra base V, suele ser más fácil construir la matriz C_N^V.

Ejemplo. *En* $E=\mathbb{R}^2$ *tenemos las bases* $V=(v_1,v_2)$ *y* $W=(w_1,w_2)$ *dadas por*

$$v_1=(2,0)\qquad v_2=(0,4)\qquad w_1=(1,1)\qquad w_2=(1,-1).$$

Sean $x,y\in\mathbb{R}^2$ *los vectores tales que* $\overline{x}_V=(7,1)^\top$ *y* $\overline{y}_W=(1,-1)^\top$. *Calcular* $\overline{x}_W$ *y* $\overline{y}_V$.
Como $v_1=w_1+w_2$ *y* $v_2=2w_1-2w_2$, *sabemos que*

$$C_W^V=\begin{pmatrix}1&2\\1&-2\end{pmatrix}\qquad C_V^W=\begin{pmatrix}1&2\\1&-2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&1/2\\1/4&-1/4\end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\overline{x}_W=C_W^V\overline{x}_V=(9,5)^\top$ *y* $\overline{y}_V=C_V^W\overline{y}_W=(0,1/2)^\top$.

Ejercicio. *Consideramos* $E=\mathbb{C}$ *como un* $\mathbb{R}$*-ev de dimensión dos. En* E *tenemos la base natural* $N=(1,\mathrm{i})$ *y la base* $V=(2+\mathrm{i},1+\mathrm{i})$. *Calcular las coordenadas de* $z=a+b\mathrm{i}\in\mathbb{C}$ *en la base* V.

Ejercicio. *Sean* V *y* W *dos bases de un ev* E *de dimensión finita. Sea* F *un sev de* E *tal que*

$$F=\{u\in E: L_W\cdot\bar{u}_W=\mathbf{0}\}$$

para alguna matriz L_W *y sea* $L_V=L_WC_W^V$. *Probar que* $F=\{u\in E: L_V\cdot\bar{u}_V=\mathbf{0}\}$.

Problema relacionado. *6.*

Método para extraer una base de unos generadores. Sea G un sev de dimensión l de un $\mathbb{K}$-ev E de dimensión n. Supongamos que $G=[w_1,\dots,w_r]$ con $r\geq l$. Es decir, los vectores $w_1,\dots,w_r$ generan G. Entre esos r generadores, queremos extraer l vectores que formen una base del sev G. El método se basa en las matrices escalonadas. (Ver el tema *Matrices*.)

Sea $V=(v_1,\dots,v_n)$ una base cualquiera del ev E, por ejemplo, la natural. Construimos la matriz $C\in M_{n\times r}(\mathbb{K})$ cuya columna j son las coordenadas del generador w_j en la base V. Escalonamos la matriz C hasta convertirla en una matriz con l escalones. Escogemos una única columna de cada escalón. Los l vectores que inicialmente estaban en esas columnas forman una base de G.

Ejemplo. *En* $E=M_2(\mathbb{R})$ *consideramos el sev* G *generado por las matrices*

$$w_1=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\qquad w_2=\begin{pmatrix}2&2\\4&2\end{pmatrix}\qquad w_3=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\qquad w_4=\begin{pmatrix}4&3\\5&3\end{pmatrix}.$$

Ponemos en columnas las coordenadas de esas matrices en la base natural y escalonamos:

$$C=\begin{pmatrix}1&2&2&4\\1&2&1&3\\2&4&1&5\\1&2&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2&4\\0&0&-1&-1\\0&0&-3&-3\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2&4\\0&0&-1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=E_2.$$

Al final hay dos escalones, luego $\dim G=2$. *El primer escalón abarca las columnas primera y segunda. El segundo escalón abarca las columnas tercera y cuarta. Por tanto, algunas bases de* G *son:* $\{w_1,w_3\}$, $\{w_1,w_4\}$, $\{w_2,w_3\}$ *y* $\{w_2,w_4\}$.

Método para ampliar unos vectores li a una base. Sea $S=\{w_1,\dots,w_l\}$ un subconjunto li de un $\mathbb{K}$-ev E de dimensión n. Queremos encontrar $n-l$ vectores que unidos a los l vectores de S formen una base de E. El método se basa en uso de menores. (Ver el tema *Determinantes*.)

Sea $V=(v_1,\dots,v_n)$ una base cualquiera del ev E, por ejemplo, la natural. Construimos la matriz $C\in M_{n\times r}(\mathbb{K})$ cuya columna j son las coordenadas del vector w_j en la base V. Buscamos un menor no nulo de orden l en esa matriz. Entonces los $n-l$ vectores de la base V "asociados" a las $n-l$ filas de la matriz C que han quedado fuera del menor cumplen lo que queremos.

Ejemplo. *Sean* $w_1=(1,2,3,4,5)$ *y* $w_2=(1,2,1,4,5)$ *dos vectores de* $\mathbb{R}^5$. *Buscamos tres vectores* w_3, w_4 *y* w_5 *tales que* $W=(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5)$ *sea una base de* $\mathbb{R}^5$. *Ponemos en columnas las* *coordenadas de los vectores w_1 y w_2 en la base natural $N = (e_1, \ldots, e_5)$, obteniéndose la matriz*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

En esta matriz hay varios menores no nulo de orden dos. Por ejemplo, $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 \neq 0$. *Las filas primera, cuarta y quinta han quedado fuera de ese menor. Por tanto,*

$$W = (w_1, w_2, w_3, w_4.w_5) = (w_1, w_2, e_1, e_4, e_5)$$

es una base de $\mathbb{R}^5$.

Métodos para pasar de bases a ecuaciones y de ecuaciones a bases. Sea E un $\mathbb{K}$-ev de dimensión n y sea $V = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de E. Dado un vector $u \in E$, notamos por $\overline{u}_V \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ sus coordenadas en la base V. Un sev $F \subset E$ de dimensión l suele expresarse mediante:

- *Generadores.* $F = [w_1, \ldots, w_r]$ para algunos vectores $w_1, \ldots, w_r \in E$ con $r \geq l$.
- *Bases.* $F = [w_1, \ldots, w_l]$ para algunos vectores li $w_1, \ldots, w_l \in E$.
- *Ecuaciones.* $F = \{u \in E : A\overline{u}_V = \mathbf{0}\}$, con $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que rango $A = n - l \leq m$.
- *Ecuaciones li.* $F = \{u \in E : A\overline{u}_V = \mathbf{0}\}$, siendo $A \in M_{(n-l)\times n}(\mathbb{K})$ de rango máximo.

Es una buena costumbre intentar siempre expresar los sev mediante bases o ecuaciones li. Por tanto,

- si tenemos generadores, quitaremos los que sobren (es decir, extraeremos una base).
- si tenemos ecuaciones, quitaremos las que sobren (es decir, nos quedaremos con unas li).

En muchas ocasiones es necesario encontrar unas ecuaciones a partir de unos generadores o una base. También resulta imprescindible efectuar el proceso inverso, es decir, encontrar una base a partir de unas ecuaciones (li o ld). Estas conversiones se hacen así.

- *De unas ecuaciones a una base.* Si $F = \{u \in E : A\overline{u}_V = \mathbf{0}\}$ para alguna matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ de rango $n - l$, resolvemos el sistema lineal homogéneo $A\overline{u}_V = \mathbf{0}$ por el método de Gauss (para más detalles, ver el tema *Matrices*). Este sistema tiene l grados de libertad. Una vez que tenemos las soluciones del sistema en función de l parámetros libres, cada parámetro multiplica a un vector. Estos l vectores forman una base.
- *De unos generadores (o una base) a unas ecuaciones.* El método es muy parecido al método para extraer una base de unos generadores. Dado el sev $G = [w_1, \ldots, w_r]$, queremos encontrar sus ecuaciones en una base $V = (v_1, \ldots, v_n)$ de E. Sea $C \in M_{n\times r}(\mathbb{K})$ la matriz cuya columna j son las coordenadas del generador w_j en la base V. Si $\overline{u}_V$ son las coordenadas de un vector $u \in E$ en la base V, entonces $u \in G \Leftrightarrow \operatorname{rango} C = \operatorname{rango}(C|\overline{u}_V)$. Por tanto, para calcular unas ecuaciones de G escalonaremos la matriz ampliada $(C|\overline{u}_V)$ e impondremos que $(C|\overline{u}_V)$ tenga el mismo número de escalones que la matriz C.

Ejemplo. *Encontrad unas ecuaciones del sev $G = [1 + 2x + x^2 + 2x^3, 1 + x - x^2 - x^3, 2 + 3x + x^3]$ en la base natural $N = (1, x, x^2, x^3)$ de $E = \mathbb{R}_3[x]$ y una base del sev*

$$F = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] : \begin{array}{rcl} a_0 - a_1 - a_2 + a_3 & = & 0 \\ 2a_0 - a_1 - a_2 - 3a_3 & = & 0 \\ 3a_0 - 2a_1 - 2a_2 - 2a_3 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Empezamos calculando una base de F.

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] : \begin{array}{rcl} a_0 - a_1 - a_2 + a_3 &=& 0 \\ 2a_0 - a_1 - a_2 - 3a_3 &=& 0 \\ 3a_0 - 2a_1 - 2a_2 - 2a_3 &=& 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] : \begin{array}{rcl} a_0 &=& 4a_3 \\ a_1 &=& 5a_3 - a_2 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ (4a_3) + (5a_3 - a_2)x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= [-x + x^2, 4 + 5x + x^3].
\end{aligned}$$

Por tanto, $\dim F = 2$ *y* $(-x + x^2, 4 + 5x + x^3)$ *es una base de F.*

Si buscamos unas ecuaciones de G en la base natural de $\mathbb{R}_3[x]$, hacemos

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 2 & a_0 \\ 2 & 1 & 3 & a_1 \\ 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 2 & -1 & 1 & a_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 2 & a_0 \\ 0 & -1 & -1 & a_1 - 2a_0 \\ 0 & -2 & -2 & a_2 - a_0 \\ 0 & -3 & -3 & a_3 - 2a_0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 2 & a_0 \\ 0 & -1 & -1 & a_1 - 2a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 - 2a_1 + 3a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 - 3a_1 + 4a_0 \end{array} \right)$$

luego $\dim G = 2$ *y* $G = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] : \begin{array}{rcl} 3a_0 - 2a_1 + a_2 &=& 0 \\ 4a_0 - 3a_1 \quad + a_3 &=& 0 \end{array} \right\}$.

PROBLEMAS RELACIONADOS. *2, 3 y 4.*

Sumas e intersecciones de sev. Dados dos sev F y G de un ev E, su *suma* y su *intersección* se definen así:

$$F + G = \{v + w : v \in F, w \in G\} \qquad F \cap G = \{u : u \in F, u \in G\}.$$

Las propiedades más importantes de la intersección y suma de sev son las siguientes:

- $u \in F \cap G \Leftrightarrow u \in F$ y $u \in G$.
- $u \in F + G \Leftrightarrow \exists v \in F$ y $\exists w \in G$ tales que $u = v + w$.
- La intersección $F \cap G$ es el mayor de los sev contenidos simultáneamente en F y en G.
- La suma $F + G$ es el menor de los sev que contienen simultáneamente a F y a G.
- *Fórmula de Grassmann:* Si $\dim E < \infty$, entonces $\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$.

EJERCICIO. *Encontrar algun ejemplo que ponga de manifiesto que la unión de sev no es un sev.*

EJERCICIO. *Probar que* $F \cap (G_1 + G_2) \supset (F \cap G_1) + (F \cap G_2)$ *y* $F + (G_1 \cap G_2) \subset (F + G_1) \cap (F + G_2)$. *Después, dar ejemplos que muestren que* $F \cap (G_1 + G_2) \neq (F \cap G_1) + (F \cap G_2)$ *y* $F + (G_1 \cap G_2) \neq (F + G_1) \cap (F + G_2)$.

EJERCICIO. *Si* $\dim E = \infty$, *pero* $\dim F < \infty$ *y* $\dim G < \infty$, *¿es correcta la fórmula de Grassmann?*

Sumas directas y sev complementarios. Dados dos sev F y G de un ev de dimensión finita, las siguientes condiciones son equivalentes:

- $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.
- $\dim(F \cap G) = 0$.
- $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$.
- Cualquier vector de $F + G$ se descompone de forma única como suma de uno de F y otro de G. Es decir, $\forall u \in F + G$, $\exists! v \in F$ y $\exists! w \in G$ tales que $u = v + w$.
- Al juntar una base de F con una base de G, obtenemos una base de $F + G$.
- Si $v \in F$ y $w \in G$, pero $v, w \neq \mathbf{0}$, entonces los vectores v y w son li.

Cuando se cumpla alguna de estas condiciones (y por tanto todas), diremos que la suma de F y G es *directa* y la escribiremos así: $F \oplus G$.

Un *complentario* de un sev F en un ev E, es cualquier sev G tal que $F \oplus G = E$. Por tanto, F y G son complementarios en E si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones (son equivalentes):

- $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$ y $F + G = E$.

- $\forall u \in E$, $\exists! v \in F$ y $\exists! w \in G$ tales que $u = v + w$.

Si F y G son complementarios en un ev E de dimensión finita, entonces $\dim F + \dim G = \dim E$. Si $(v_1, \ldots, v_l)$ es una base de F y $(v_1, \ldots, v_l, v_{l+1}, \ldots, v_n)$ es una base de E, entonces los vectores $v_{l+1}, \ldots, v_n$ son una base de un complementario de F en E.

Ejercicio. *Consideramos en $E = M_n(\mathbb{R})$ los sev de matrices simétricas y antisimétricas*

$$F = \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^\top = A\right\} \qquad G = \left\{B \in M_n(\mathbb{R}) : B^\top = -B\right\}.$$

Probar que F y G son complementarios en E. (Consejo: No escribais los elementos de las matrices.)

Problema relacionado. *17.*

Para definir la suma directa de más de dos sev hemos de ir con cuidado. Dados unos sev $F_1, \ldots, F_r$ de un ev de dimensión finita, las siguientes condiciones son equivalentes:

- $\dim(F_1 + \cdots + F_r) = \dim F_1 + \cdots + \dim F_r$.
- Cualquier vector de $F_1 + \cdots + F_r$ se descompone de forma única como suma de vectores de los sev F_j, $j = 1, \ldots, r$. Es decir, $\forall u \in F_1 + \cdots + F_r$, $\exists! v_j \in F_j$ tales que $u = v_1 + \cdots + v_r$.
- Al juntar una base de cada sev F_j, obtenemos una base de $F_1 + \cdots + F_r$.
- Si $v_j \in F_j$ y $v_j \neq \mathbf{0}$, entonces los vectores $v_1, \ldots, v_r$ son li.

Cuando se cumpla alguna de estas condiciones (y por tanto todas), diremos que la suma de los sev es *directa* y la escribiremos así: $F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$.

Ejercicio. *Encontrad tres sev F_1, F_2, F_3 tales que $F_1 \cap F_2 = \{\mathbf{0}\}$, $F_1 \cap F_3 = \{\mathbf{0}\}$ y $F_2 \cap F_3 = \{\mathbf{0}\}$, pero que no esten en suma directa.*

Métodos para calcular sumas, intersecciones y complementarios. Los métodos habituales para sumar o intersecar dos sev son los siguientes.

- *Suma de sev.* Se juntan todos los generadores y después se quitan los que sobran, ya que
$$F = [v_1, \ldots, v_r], G = [w_1, \ldots, w_s] \Longrightarrow F + G = [v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s].$$
- *Intersección de sev.* Se juntan todas las ecuaciones y después se quitan las que sobran, ya que

$$F = \{u \in E : A\overline{u}_V = \mathbf{0}\}, G = \{u \in E : B\overline{u}_V = \mathbf{0}\} \Longrightarrow F \cap G = \left\{ u \in E : \begin{array}{rcl} A\overline{u}_V & = & \mathbf{0} \\ B\overline{u}_V & = & \mathbf{0} \end{array} \right\}.$$

Ejemplo. *En $E = \mathbb{R}_3[x]$ consideramos los sev $G = [1 + 2x + x^2 + 2x^3, 1 + x - x^2 - x^3, 2 + 3x + x^3]$ y*

$$F = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] : \begin{array}{rcl} a_0 - a_1 - a_2 + a_3 & = & 0 \\ 2a_0 - a_1 - a_2 - 3a_3 & = & 0 \\ 3a_0 - 2a_1 - 2a_2 - 2a_3 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Entonces $\dim(F + G) = 3$ *y* $\dim(F \cap G) = 1$. *Además:*

$$\begin{aligned} F + G &= [x - x^2, 1 + x, x + x^3] = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] : a_0 - a_1 - a_2 + a_3 = 0\right\} \\ F \cap G &= [12 + 17x - 2x^2 + 3x^3] = \left\{ \sum_{j=0}^{3} a_jx^j \in \mathbb{R}_3[x] : \begin{array}{rcl} a_0 - a_1 - a_2 + a_3 & = & 0 \\ 2a_0 - a_1 - a_2 - 3a_3 & = & 0 \\ 3a_0 - 2a_1 + a_2 & = & 0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Problemas relacionados. *5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14 y 15. (Salvo lo concerniente a sev complementarios.)*

Ahora explicamos como calcular un complementario de un sev F en un ev E de dimensión finita. Por Steinitz, sabemos que si $\dim E = n$ y los vectores $w_1, \ldots, w_l$ forman una base F, podemos ampliarlos mediante $n - l$ vectores $w_{l+1}, \ldots, w_n \in E$ hasta formar una base de E. Una vez hecho esto, el sev $G = [w_{l+1}, \ldots, w_n]$ es un complementario de F en E. Y ya hemos explicado como ampliar un conjunto de vectores li a una base.

Ejemplo. *$G = [e_1, e_3]$ es un complementario de $F = [(1,2,3,4),(1,1,3,4)]$ en $\mathbb{R}^4$, pero $H = [e_1, e_2]$ no.*

Existe otro modo de calcular complementarios si conocemos unas ecuaciones li del sev en alguna base. Supongamos que tenemos un sev $F = \{u \in E : A\overline{u}_V = \mathbf{0}\}$ de dimensión l dentro de un ev E de dimensión n. También suponemos que $A \in M_{(n-l)\times n}(\mathbb{K})$ es una matriz de rango máximo. Entonces, el sev generado por los $n-l$ vectores cuyas coordenadas en la base V son las filas de A es un complementario en E del sev F.

Ejemplo. *Un complementario de $F = \{P(x) \in \mathbb{R}_4[x] : P(1) = P(2) = 0\}$ en $\mathbb{R}_4[x]$ es*

$$G = [1 + x + x^2 + x^3 + x^4, 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4].$$

Problema relacionado. *11.*

Aplicaciones Lineales

Primeras definiciones. Una *aplicación lineal* de un $\mathbb{K}$-ev de salida E a un $\mathbb{K}$-ev de llegada F es una aplicación $f : E \to F$ tal que

- $f(u + v) = f(u) + f(v)$ para todos $u, v \in E$.
- $f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$ para todo $u \in E$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Notaremos por $L(E, F)$ al conjunto de todas las aplicaciones lineales de E a F.

PROBLEMA RELACIONADO. *1.*

Las siguientes propiedades se deducen a partir de la definición. Si $f : E \to F$ es una aplicación lineal, entonces:

- $f(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot u_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot f(u_j)$, para todos $u_1, \ldots, u_n \in E$ y para todos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.
- $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$.
- Si G es un sev del ev de llegada F, $f^{-1}(G) = \{u \in E : f(u) \in G\}$ es un sev del ev de salida E.
- Si H es un sev del ev de salida E, $f(H) = \{f(u) : u \in H\}$ es un sev del ev de llegada F.

EJERCICIO. *Probar las propiedades anteriores.*

Los casos $G = \{\mathbf{0}\}$ y $H = E$ dan lugar a dos importantes definiciones.

- El *núcleo* de f es el sev del ev de salida definido por
$$\operatorname{Nuc} f = f^{-1}(\mathbf{0}) = \{u \in E : f(u) = \mathbf{0}\}.$$
- La *imagen* de f es el sev del ev de llegada definido por
$$\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(u) : u \in E\} = [f(u_1), \ldots, f(u_n)]$$
donde $(u_1, \ldots, u_n)$ puede ser cualquier base del ev de llegada.

Recordamos que una aplicación $f : A \to B$ entre conjuntos es:

- *inyectiva* cuando no hay dos elementos diferentes del conjunto de salida que tengan la misma imagen. Es decir, cuando
$$f(u) = f(v) \Longleftrightarrow u = v.$$
- *exhaustiva* cuando cualquier elemento del conjunto de llegada es la imagen de algún elemento del conjunto de salida. Es decir, cuando
$$\forall w \in B \ \exists u \in A \ \text{ t.q. } \ f(u) = w.$$
- *biyectiva* cuando es inyectiva y exhaustiva.

Las aplicaciones biyectivas se pueden invertir. Dada una aplicación biyectiva $f : A \to B$, existe otra aplicación $f^{-1} : B \to A$ tal que $f(u) = v \Leftrightarrow f^{-1}(v) = u$.

Estos conceptos se pueden trasladar al marco de las aplicaciones lineales, dando lugar a las siguientes caracterizaciones. Supongamos que E y F son ev de dimensión finita. Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal y sea $(u_1, \ldots, u_n)$ una base del ev de salida E. Entonces:

- f es inyectiva $\Longleftrightarrow \operatorname{Nuc} f = \{\mathbf{0}\} \Longleftrightarrow f(u_1), \ldots, f(u_n)$ son li en F.
- f es exhaustiva $\Longleftrightarrow \operatorname{Im} f = F \Longleftrightarrow f(u_1), \ldots, f(u_n)$ generan F.
- f es biyectiva $\Longleftrightarrow f(u_1), \ldots, f(u_n)$ son una base de F.

Las caracterizaciones referentes al núcleo y a la imagen no requieren la hipótesis de dimensión finita.

EJERCICIO. *Probar estas caracterizaciones.*

PROBLEMA RELACIONADO. *2.*

Finalmente, listamos un vocabulario que no vamos a usar, pero que conviene saber. Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal. Diremos que:

- f es un *monomorfismo* si y sólo si f es inyectiva.
- f es un *epimorfismo* si y sólo si f es exhaustiva.
- f es un *isomorfismo* si y sólo si f es biyectiva.
- f es un *endomorfismo* si y sólo si $E = F$.
- f es un *automorfismo* si y sólo si $E = F$ y f es biyectiva.

Notaremos por $L(E)$ o por $\mathrm{End}(E)$ al conjunto de todos los endomorfismos de E.

Ejemplos de aplicaciones lineales. Vamos a empezar con los ejemplos más sencillos posibles:

- La *aplicación nula* de un ev E a otro ev F es aquella que envia todos los vectores de E al vector nulo de F. Es decir, $f(u) = \mathbf{0}$, para todo $u \in E$. Escribiremos $f = \mathbf{0} = \mathbf{0}_{E,F}$. Además,
$$\mathrm{Nuc}\, f = E \qquad \mathrm{Im}\, f = \{\mathbf{0}\}.$$
- La *aplicación identidad* de un ev E es el endomorfismo que envia cualquier vector al propio vector. Es decir, $f(u) = u$, para todo $u \in E$. Escribiremos $f = \mathrm{Id} = \mathrm{Id}_E$. Además,
$$\mathrm{Nuc}\, f = \{\mathbf{0}\} \qquad \mathrm{Im}\, f = E.$$

A continuación, presentamos un ejemplo geométrico en el plano y otro en el espacio.

- En el plano $E = \mathbb{R}^2$, consideramos el *giro* de ángulo θ. Veremos más adelante que, en coordenadas naturales, este giro se expresa como
$$g_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad g_\theta : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$
El giro de ángulo θ es una aplicación biyectiva cuya inversa es el giro de ángulo $-\theta$. En particular, $\mathrm{Nuc}\, g_\theta = \{\mathbf{0}\}$ e $\mathrm{Im}\, g_\theta = \mathbb{R}^2$.
- En el espacio $E = \mathbb{R}^3$, consideramos la *proyección* sobre el plano $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ en la dirección de la recta $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y = z\}$. En coordenadas naturales, esta proyección se expresa como
$$p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad p(x, y, z) = (x, y - z, 0).$$
El núcleo de p es la recta H y su imagen es el plano G, luego p no es ni inyectiva, ni exhaustiva.

Finalmente, presentamos una aplicación lineal que no es un endomorfismo. Concretamente, damos un ejemplo con $E = M_2(\mathbb{R})$ y $F = \mathbb{R}_2[x]$. Sea $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ la aplicación dada por
$$f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a + d) + (a + b - c + d)x + (b - c)x^2.$$

Empezamos calculando el núcleo de esta aplicación.
$$\begin{aligned} \mathrm{Nuc}\, f &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : (a + d) + (a + b - c + d)x + (b - c)x^2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{array}{rcl} a + d &=& 0 \\ b - c &=& 0 \end{array} \right\} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Así pues, $\dim \operatorname{Nuc} f = 2$ y la aplicación no es inyectiva. Ahora calculamos la imagen usando que $\operatorname{Im} f$ es el sev generado por las imágenes de una base cualquiera de ev de salida $E = M_2(\mathbb{R})$. Obviamente, trabajamos con la base natural de $M_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \left[f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= [1+x, x+x^2, 1+x, -x-x^2] = [1+x, x+x^2].\end{aligned}$$

Luego $\dim \operatorname{Im} f = 2$ y la aplicación tampoco es exhaustiva.

Comentarios sobre dimensiones. En esta sección siempre supondremos que los ev de salida y llegada son de dimensión finita. Enpezamos estableciendo una fórmula con importantes consecuencias.

Si $f : E \to F$ es una aplicación lineal entre ev de dimensión finita, entonces

$$\dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E.$$

Ejercicio. *Comprobar que esta fórmula se cumple en todos los ejemplos de la sección anterior.*

Ejercicio. *Probar la fórmula.*

Las importantes consecuencias antes mencionadas son las siguientes:

- f inyectiva $\Rightarrow \dim E \le \dim F$.
- f exhaustiva $\Rightarrow \dim E \ge \dim F$.
- f biyectiva $\Rightarrow \dim E = \dim F$.
- Si $\dim E = \dim F$, entonces f inyectiva $\Leftrightarrow f$ exhaustiva $\Leftrightarrow f$ biyectiva.

Ejemplo. *Una aplicación lineal $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ nunca puede ser inyectiva. Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}_2[x] \to M_2(\mathbb{R})$ nunca puede ser exhaustiva.*

El *rango* de una aplicación lineal $f : E \to F$ es igual a la dimensión de la imagen:

$$\operatorname{rango} f = \dim \operatorname{Im} f.$$

Determinación de aplicaciones lineales. En esta sección queremos determinar que aplicaciones lineales cumplen ciertas condiciones prefijadas de antemano.

Sean E y F dos ev de dimensión finita. Sean $w_1, \ldots, w_r$ unos vectores del ev de salida E y $v_1, \ldots, v_r$ unos vectores del ev de llegada F. ¿Cuántas aplicaciones lineales $f : E \to F$ hay tales que

$$f(w_j) = v_j \qquad j = 1, \ldots, n?$$

La respuesta depende de los vectores escogidos:

- Cuando los vectores $w_1, \ldots, w_r$ son una base de E, tan sólo hay una.
- Cuando los vectores $w_1, \ldots, w_r$ son li pero no son una base de E, hay infinitas.
- Cuando los vectores $w_1, \ldots, w_r$ son ld, puede haber infinitas, una o ninguna, dependiendo de como sean los vectores $v_1, \ldots, v_r$.

Ejercicio. *Probar estas afirmaciones.*

Ejemplo. *No hay ninguna aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que*

$$f(1,0) = (1,-1,1) \qquad f(0,1) = (1,2,3) \qquad f(1,1) = (2,1,0)$$

ya que $f(1,0) + f(0,1) = (1,-1,1) + (1,2,3) = (2,1,4) \ne (2,1,0) = f(1,1) = f((1,0) + (0,1))$.

Ejemplo. *Existe una única aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que*

$$f(1,0) = (1,-1,1) \qquad f(0,1) = (1,2,3) \qquad f(1,1) = (2,1,4).$$

Es la aplicación $f(x,y) = x \cdot f(1,0) + y \cdot f(0,1) = (x+y, 2y-x, x+3y)$.

Matriz de una aplicación lineal. Vamos a introducir el concepto más importante del curso. Es importante entender perfectamente esta sección. Aquí también supondremos que los ev de salida y llegada son de dimensión finita.

Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal entre ev de dimensión finita. Sea $W = (w_1, \dots, w_n)$ una base del ev de salida y $V = (v_1, \dots, v_m)$ una base del ev de llegada.

Por definición, la *matriz de la aplicación f en la base de salida W y la base de llegada V* es la matriz $M_V^W(f) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ cuya columna j está formada por las coordenadas en la base de llegada V de la imagen del vector j de la base de salida W. Es decir,

$$f(w_j) = \alpha_{1j} \cdot v_1 + \alpha_{2j} \cdot v_2 + \cdots + \alpha_{mj} \cdot v_m \Longrightarrow M_V^W(f) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

La matriz $M_V^W(f)$ tiene $n = \dim E$ columnas, tiene $m = \dim F$ filas y cumple rango $M_V^W(f) = \operatorname{rango} f$.

La propiedad fundamental la matriz $M_V^W(f)$ es la siguiente:

$$\overline{f(u)}_V = M_V^W(f) \cdot \bar{u}_W \qquad \forall u \in E.$$

Conviene recordar que $\bar{u}_W$ denota las coordenadas del vector u en la base de salida W, mientras que $\overline{f(u)}_V$ denota las coordenadas del vector imagen $f(u)$ en la base de llegada V. (Repasar el tema *Espacios Vectoriales*.)

Ejercicio. *Comprobar que esta propiedad es cierta si u es uno de los vectores de la base de salida W. A continuación, probar que la propiedad es cierta para cualquier vector u.*

Ejercicio. *Comprobar que cuando $F = E$, entonces $M_V^W(\mathrm{Id}) = C_V^W$.*

Cuando el ev de salida y el de llegada coincidan: $F = E$ y f es un endomorfismo, pondremos la misma base en la salida y la llegada: $V = W$ y diremos que $M_W^W(f)$ es la *matriz de f en la base W*.

Ejemplo. *Vamos a calcular la matriz del giro de ángulo θ en la base natural de $\mathbb{R}^2$.*

Notamos por $g_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ al giro y por $N = (e_1, e_2)$ con $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$ a la base natural. Mediante un dibujo y un poco de trigonometría se puede ver que

$$g_\theta(e_1) = (\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\theta) \cdot e_1 + (\sin\theta) \cdot e_2 \quad g_\theta(e_2) = (-\sin\theta, \cos\theta) = (-\sin\theta) \cdot e_1 + (\cos\theta) \cdot e_2.$$

Por tanto, la respuesta es $M_N^N(g_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Ejemplo. *Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal dada por*

$$f(x, y, z) = (2x + 5y - 3z, x - y + z, x + 2y + 3z, z).$$

Sean W y V las bases naturales de $E = \mathbb{R}^3$ y $F = \mathbb{R}^4$ respectivamente. Queremos calcular la matriz de f en las bases naturales de salida y llegada, es decir, $A = M_V^W(f)$. Como

$$f(1, 0, 0) = (2, 1, 1, 0) \qquad f(0, 1, 0) = (5, -1, 2, 0) \qquad f(0, 0, 1) = (-3, 1, 3, 1)$$

la matriz que buscamos es $A = M_V^W(f) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Es importante observar que los elementos de la fila i de la matriz $A = M_N^N(f)$ son los coeficientes de la ecuación i de la aplicación. Por eso resulta tan sencillo calcular la matriz de una aplicación en las bases naturales. Es mucho más díficil calcular la matriz en otras bases.

Ejemplo. *Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación del ejemplo anterior. Sea $W' = (w_1', w_2', w_3')$ la base de salida formada por los vectores $w_1' = (1,1,1)$, $w_2' = (1,1,0)$ y $w_3' = (1,0,0)$. Sea $V' = (v_1', v_2', v_3', v_4')$ la base de llegada formada por los vectores*

$$v_1' = (1,0,0,0) \qquad v_2' = (1,1,1,0) \qquad v_3' = (0,1,0,0) \qquad v_4' = (0,0,1,1).$$

Queremos calcular $B = M_{V'}^{W'}(f)$. Mediante unos cálculos un poco pesados, pero simples, vemos que

$$\begin{aligned} f(w_1') &= (4,1,6,1) = (-1)\cdot v_1' + 5\cdot v_2' + (-4)\cdot v_3' + 1\cdot v_4' \\ f(w_2') &= (7,0,3,0) = 4\cdot v_1' + 3\cdot v_2' + (-3)\cdot v_3' + 0\cdot v_4' \\ f(w_3') &= (2,1,1,0) = 1\cdot v_1' + 1\cdot v_2' + 0\cdot v_3' + 0\cdot v_4' \end{aligned}$$

luego la matriz que buscamos es $B = M_{V'}^{W'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio. *Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ una aplicación lineal tal que cualquier polinomio y su imagen por f siempre tienen el mismo grado. Sea*

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

la matriz de f en la base natural de $\mathbb{R}_3[x]$. ¿Qué elementos de esta matriz podemos decir que son nulos? ¿Y cuáles no pueden ser nulos? (Respuesta: $a_1 = a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = c_3 = 0$ y $a_0, b_1, c_2, d_3 \neq 0$.)

Ejercicio. *Sea $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ una aplicación lineal tal que la imagen de cualquier matriz es una matriz antisimétrica. Sea*

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

la matriz de f en la base natural de $M_2(\mathbb{R})$. ¿Qué elementos de esta matriz podemos decir que son nulos? (Respuesta: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0$.)

Problemas relacionados. *3, 8 y 9.*

Cambios de base. Para entender bién esta sección es necesario recordar los cambios de base del tema *Espacios Vectoriales*. Seguimos suponiendo que los ev de salida y llegada son de dimensión finita.

Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal entre ev de dimensión finita. Dadas dos bases cualquiera de salida W y W' y dos bases cualquiera de llegada V y V', entonces

$$M_{V'}^{W'}(f) = C_{V'}^{V} \cdot M_V^W(f) \cdot C_W^{W'}.$$

Un truco memotécnico para recordar esta fórmula consiste en escribir que $\frac{W'}{V'} = \frac{V}{V'} \cdot \frac{W}{V} \cdot \frac{W'}{W}$. Otro truco, quizás el más adecuado para resolver problemas, pasa por escribir el diagrama

$$\begin{tikzcd} (E;W) \arrow[r, "A", "f"'] & (F;V) \\ (E;W') \arrow[u, "S"] \arrow[r, "B", "f"'] & (F;V') \arrow[u, "T"'] \end{tikzcd}$$

donde $A = M_V^W(f)$ y $B = M_{V'}^{W'}(f)$, mientras que $S = C_W^{W'}$ y $T = C_V^{V'}$ son matrices de cambio de base. Mirando el diagrama vemos que

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot S$$

pues la inversa $T^{-1} = C_{V'}^{V}$ va en sentido inverso a la matriz $T = C_V^{V'}$.

Cuando la base de llegada no cambia tenemos que $V' = V$, luego $T = C_V^V = \mathrm{Id}$ y $B = A \cdot S$.

Cuando la base de salida no cambia tenemos que $W' = W$, luego $S = C_W^W = \mathrm{Id}$ y $B = T^{-1} \cdot A$.

Cuando el ev de salida y el de llegada coinciden es habitual que $V = W$ y $V' = W'$. En tal caso $T = S$ y $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$.

Ejemplo. *Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal dada por*

$$f(x, y, z) = (2x + 5y - 3z, x - y + z, x + 2y + 3z, z)$$

que hemos usado en los ejemplos anteriores. Sean W, W', V y V' las bases de esos ejemplos.

La matriz de la aplicación en las bases naturales $A = M_V^W(f)$ es fácil de calcular. Queremos calcular $B = M_{V'}^{W'}(f)$ usando $A = M_V^W(f)$. Las matrices de cambio de base que nos interesan son:

$$S = C_W^{W'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad T = C_V^{V'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La fórmula de cambio de base que resuelve el problema es:

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo. *Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \to M_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal dada por*

$$f : P(x) \mapsto \begin{pmatrix} P(1) - P''(1) & P(1) - P'(1) \\ P(1) - P'(1) & P(1) - P''(1) \end{pmatrix}.$$

Queremos calcular la matriz de f en la base natural de salida $W = (1, x, x^2)$ y la base de llegada $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ formada por las matrices

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea N la base natural del ev $M_2(\mathbb{R})$. Empezamos calculando $A = M_N^W(f)$. Como

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad f(x^2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

vemos que $A = M_N^W(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. A continuación, aplicamos la fórmula del cambio de base para calcular $B = M_V^W(f)$ teniendo en cuenta que la base de salida no cambia. Así pues,

$$B = T^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $T = C_N^V$ es la matriz de cambio de base de la base V a la base natural N.

Problemas relacionados. *10b, 11e, 13 y 14.*

Cálculo de núcleos, imágenes, rangos y anti-imágenes. Sea $f : E \to F$ una aplicación entre ev de dimensión finita. Sea W una base de salida y V una base de llegada. Sea $A = M_V^W(f)$. Sea G un sev del ev de llegada F y sea B una matriz cuyas filas son los coeficientes de unas ecuaciones del sev G en base V. Entonces:

- Las columnas de A son las coordenadas en base V de unos generadores del sev $\operatorname{Im} f$.
- Las filas de A son los coeficientes de las ecuaciones del sev $\operatorname{Nuc} f$ en base W.
- $\operatorname{rango} f = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rango} A$ y $\dim \operatorname{Nuc} f = \dim E - \operatorname{rango} f = \dim E - \operatorname{rango} A$.
- Las filas de BA son los coeficientes de unas ecuaciones de la anti-imagen $f^{-1}(G)$ en base W.

EJEMPLO. *Queremos calcular el núcleo y la imagen de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}_3[x] \to M_2(\mathbb{R})$ cuya matriz en las bases naturales de salida y llegada es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

También queremos calcular la anti-imagen del sev G de $M_2(\mathbb{R})$ formado por las matrices simétricas.

Cálculo del núcleo:

$$\operatorname{Nuc} f = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : \begin{array}{rcl} a_0 - a_1 - a_2 + a_3 & = & 0 \\ 2a_0 - a_1 - a_2 - 3a_3 & = & 0 \\ 3a_0 - 2a_1 - 2a_2 - 2a_3 & = & 0 \\ a_0 \qquad\qquad - 4a_3 & = & 0 \end{array} \right\} = [x^2 - x, x^3 + 5x + 4].$$

Cálculo de la imagen:

$$\operatorname{Im} f = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Cálculo de la anti-imagen: Empezamos buscando unas ecuaciones del sev G.

$$G = \{M \in M_2(\mathbb{R}) : M^\top = M\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : b - c = 0 \right\}$$

luego $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Por tanto,

$$f^{-1}(G) = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_0 - a_1 - a_2 + a_3 = 0 \right\} = [x + 1, x^2 + 1, x^3 - 1].$$

PROBLEMAS RELACIONADOS. *4, 5, 6, 7 y 21.*

Suma, composición, e inversión de aplicaciones lineales. Sean E, F y G tres $\mathbb{K}$-ev. Las principales operaciones que podemos realizar con aplicaciones lineales son las siguientes.

- *Suma.* Dadas $f, g \in L(E, F)$, $f + g \in L(E, F)$ es la aplicación dada por
$$(f + g)(u) = f(u) + g(u) \qquad \forall u \in E.$$
- *Producto por escalar.* Dado $\lambda \in \mathbb{K}$ y $f \in L(E, F)$, $\lambda \cdot f \in L(E, F)$ es la aplicación dada por
$$(\lambda \cdot f)(u) = \lambda \cdot f(u) \qquad \forall u \in E.$$
- *Composición.* Dadas $f \in L(E, F)$ y $g \in L(F, G)$, $g \circ f \in L(E, G)$ es la aplicación dada por
$$(g \circ f)(u) = g\big(f(u)\big) \qquad \forall u \in E.$$
(Para calcular $g \circ f$ es necesario que el ev de llegada de f coincida con el ev de salida de g.)
- *Potencia.* Dada $f \in \operatorname{End}(E)$, su potencia k-ésima $f^k \in \operatorname{End}(E)$ es la aplicación
$$f^k = \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{k \text{ veces}}.$$
- *Inversión.* Si $f \in L(E, F)$ es biyectiva, existe una única $f^{-1} \in L(F, E)$ tal que
$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \operatorname{Id}.$$

EJERCICIO. *Probar que si* $f : E \to F$ *y* $g : F \to G$ *son lineales, la composición* $g \circ f$ *también lo es.*

EJERCICIO. *Probar que si* f *es una aplicación lineal biyectiva, su inversa* f^{-1} *también lo es.*

EJEMPLO. *Sean* $D, f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ *las aplicaciones lineales dadas por*

$$D : P(x) \mapsto P'(x) \qquad f : P(x) \mapsto P(x) - P'(x).$$

Entonces $D^4 = \mathbf{0}$. *Además,* $f = \mathrm{Id} - D$ *es invertible y su inversa es* $f^{-1} = \mathrm{Id} + D + D^2 + D^3$.

EJERCICIO. *Sea* $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$. *Probar que* $\mathrm{Nuc}\, f = \mathrm{Im}\, f \Longleftrightarrow f^2 = \mathbf{0}$ *y* $\mathrm{rango}\, f = 2$.

A continuación, se listan las propiedades de estas operaciones. (Comparar con el tema *Matrices.*)

- El conjunto $L(E, F)$ es un $\mathbb{K}$-ev con las operaciones suma y producto por escalar.
- El elemento neutro de la suma de aplicaciones es la aplicación nula: $f = \mathbf{0}$.
- El elemento neutro de la composición de aplicaciones es la aplicación identidad: $f = \mathrm{Id}$.
- Propiedad asociativa combinada: $\lambda \cdot (g \circ f) = (\lambda \cdot g) \circ f = g \circ (\lambda \cdot f)$.
- La composición de aplicaciones es asociativa: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- La composición de aplicaciones **no** es conmutativa.
- La composición de aplicaciones **no** tiene elemento inverso.
- Propiedad distributiva: $g \circ (f_1 + f_2) = (g \circ f_1) + (g \circ f_2)$ y $(g_1 + g_2) \circ f = (g_1 \circ f) + (g_2 \circ f)$.
- Si $f \in L(E, F)$ y $g \in L(F, G)$ son biyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Hay otras propiedades importantes, pero requieren trabajar en ev de dimensión finita. Por ejemplo, si $f, g \in \mathrm{End}(E)$ con $\dim E < \infty$, entonces

$$g \circ f = \mathrm{Id} \Longleftrightarrow f \circ g = \mathrm{Id} \Longleftrightarrow g = f^{-1} \Longleftrightarrow f^{-1} = g.$$

En el problema 12 se comprueba que estas (y otras) propiedades son falsas en ev de dimensión infinita.

Finalmente, sean W, V y U unas bases cualesquiera de los ev E, F y G, respectivamente. Para calcular las matrices de una aplicación suma, composición, potencia o inversa basta seguir las siguientes reglas teniendo cuidado para que las bases cuadren.

- La matriz de la aplicación suma es la suma de las matrices de las aplicaciones:
$$M_V^W(f + g) = M_V^W(f) + M_V^W(g) \qquad \forall f, g \in L(E, F).$$
- La matriz de la aplicación producto por escalar es el producto del escalar por la matriz de la aplicación:
$$M_V^W(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot M_V^W(f) \qquad \forall f \in L(E, F), \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$
- La matriz de la aplicación composición es el producto de las matrices las aplicaciones:
$$M_U^W(g \circ f) = M_U^V(g) \cdot M_V^W(f) \qquad \forall f \in L(E, F), \forall g \in L(F, G).$$
(La base de llegada de la matriz de f debe coincir con la base de salida de la matriz de g.)
- La matriz de la aplicación potencia k-ésima es la potencia k-ésima de la matriz de la aplicación:
$$M_W^W(f^k) = \left(M_W^W(f)\right)^k \qquad \forall f \in \mathrm{End}(E).$$
- La matriz de la aplicación inversa es la inversa de la matriz de la aplicación:
$$M_W^V(f^{-1}) = \left(M_V^W(f)\right)^{-1} \qquad \forall f \in L(E, F) \text{ invertible}.$$

EJEMPLO. *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *la aplicación lineal dada por* $f(x, y, z) = (3x, x-y, 2x+y+z)$. *Queremos probar que la aplicación* $(f^2 - \mathrm{Id}) \circ (f - 3 \cdot \mathrm{Id})$ *es igual a la aplicación nula.*

La matriz de f *en la base natural* N *de* $\mathbb{R}^3$ *es* $A = M_N^N(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Por tanto, la matriz de la aplicación* $(f^2 - \mathrm{Id}) \circ (f - 3 \cdot \mathrm{Id})$ *en la base natural es igual a* $(A^2 - \mathrm{Id})(A - 3 \cdot \mathrm{Id}) = \mathbf{0}$.

PROBLEMAS RELACIONADOS. *10, 11, 12, 15 y 16.*

Sev invariantes. En esta sección trabajaremos con endomorfismos, es decir, supondremos que el ev de salida y llegada coinciden. El concepto de sev invariante volverá a parecer en el tema *Jordan*.

Sea $f : E \to E$ una aplicación lineal. Sea $F = [u_1, \ldots, u_r]$ un sev del ev E. Diremos que F es un *sev invariante* por f cuando se cumpla alguna de las siguientes condiciones (son equivalentes):

- $f(u) \in F$ para todo $u \in F$.
- $f(u_j) \in F$ para $j = 1, \ldots, r$.

EJEMPLO. *El sev* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\}$ *es invariante por la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $f(x, y, z) = (x - y + z, y, x/2 + 3z/2)$.

Empezamos viendo que $F = [u_1, u_2]$ *con* $u_1 = (1, 1, 0)$ *y* $u_2 = (0, 2, 1)$. *Para acabar, basta ver que*

$$f(u_1) = (0, 1, 1/2) \in F \qquad f(u_2) = (-1, 2, 3/2) \in F.$$

EJERCICIO. *Supongamos que* F *y* G *son sev invariantes por una aplicación lineal* $f : E \to E$. *¿Es la intersección* $F \cap G$ *invariante por* f*? ¿Y la suma* $F + G$*? (Respuesta: Sí y sí.)*

EJERCICIO. *Sea* $f : \mathbb{R}_{2n+1}[x] \to \mathbb{R}_{2n+1}[x]$ *una aplicación lineal tal que los sev*

$$F = [1, x^2, x^4, \ldots, x^{2n-2}, x^{2n}] \qquad G = [x, x^3, x^5, \ldots, x^{2n-1}, x^{2n+1}]$$

son invariantes por f. *Sea* $A = (a_{ij})$ *la matriz de* f *en la base natural* $N = (1, \ldots, x^{2n+1})$ *de* $\mathbb{R}_{2n+1}[x]$. *¿Qué elementos de la matriz* A *podemos decir que son nulos? (Respuesta:* $a_{ij} = 0$ *si* $|i - j|$ *impar.)*

PROBLEMAS RELACIONADOS. *27, 28, 29 y 30.*

Problemas para no dormir. 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24 y 25.

Determinantes

Determinantes de matrices cuadradas. El *determinante de una matriz cuadrada* se puede definir recursivamente mediante desarrollos por columnas o por filas. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$, donde i es el índice de la fila y j es el índice de la columna. Notamos por A_{ij} la matriz $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene al quitar la fila i y la columna j de la matriz A. Entonces

- Desarrollo por la fila i: $\det A = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$.
- Desarrollo por la columna j: $\det A = |A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$.

Aplicando repetidamente estas fórmulas, vamos reduciende el orden de las determinantes hasta llegar a determinantes de órdenes uno, dos o tres que se pueden calcular usando las *reglas de Sarrus*:

$$\begin{aligned} |a_{11}| &= a_{11} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}. \end{aligned}$$

El valor del determinante no depende de las filas o columnas escogidas. La dificultad del cálculo probablemente sí.

Las principales propiedades de los determinantes de matrices cuadradas son las siguientes.

1. Si una columna es cero, el determinante es cero.
2. Si hay dos columnas iguales, el determinante es cero.
3. Si las columnas son ld, el determinante es cero.
4. El determinante cambia de signo al permutar dos columnas.
5. El determinante no cambia si a una columna se le suma una cl de las restantes.
6. El determinante es lineal respecto a cada columna:
   - $\det(\ldots, c_i + c'_i, \ldots) = \det(\ldots, c_i, \ldots) + \det(\ldots, c'_i, \ldots)$.
   - $\det(\ldots, \lambda c_i, \ldots) = \lambda \det(\ldots, c_i, \ldots)$.
7. Las filas también cumplen las anteriores propiedades.
8. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
9. El determinante del producto es igual al producto de determinantes: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
10. Una matriz A es invertible si y solo si $\det A \neq 0$. Además, $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.
11. Una matriz y su transpuesta tienen el mismo determinante: $\det(A^\top) = \det A$.
12. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos diagonales.
13. El determinante de una matriz triangular por bloques es igual al producto de los determinantes de los bloques diagonales.

Ejercicio. *Comprobad mediante ejemplos que* $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ *y* $\det(\lambda A) \neq \lambda \det A$.

Ejercicio. *Probar que* $\det(A^k) = (\det A)^k$ *si* $k \in \mathbb{N}$. *Si A es invertible, la fórmula también se cumple cuando* $k \in \mathbb{Z}$.

El método de Gauss para calcular determinantes. No es una buena idea aplicar la definición para calcular determinantes de matrices grandes. Es mejor convertir la matriz inicial en una matriz triangular mediante una cadena de operaciones del siguiente tipo:

- Sumarle a una columna (o fila) un cl de las restantes.

Estas operaciones no modifican el valor del determinante. Es importante recordar que si permutamos dos columnas (o filas) o multiplicamos una columna (o fila) por un número el valor del determinante si se modifica.

Problemas relacionados. *1, 2, 4 y 9.*

El determinante de Vandermonde. Dados $n+1$ números $x_0,\ldots,x_n$, se cumple que

$$V(x_0,\ldots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 & \cdots & (x_0)^n \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & \cdots & (x_1)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & (x_{n-1})^2 & \cdots & (x_{n-1})^n \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \cdots & (x_n)^n \end{vmatrix} = \prod_{0\leq i<j\leq n} (x_j - x_i).$$

Nótese que $V(x_0,\ldots,x_n) \neq 0$ cuando los números x_0, x_1,..., x_n son diferentes entre sí.

Un método para calcular rangos. Los *menores de orden* r de una matriz (cuadrada o no) son aquellas matrices $r\times r$ que se obtienen tachando una cantidad adecuada de filas y columnas de la matriz inicial. Por ejemplo, una matriz 3×4 tiene: cuatro menores de orden 3, dieciocho menores de orden 2 y doce menores de orden uno.

El rango de un matriz es igual al mayor orden de los menores cuyo determinante es diferente de cero. Si hay algún menor de orden r y determinante no nulo, entonces el rango es mayor o igual que r. Cuando todos los menores de orden r tienen determinante cero, el rango es menor que r.

Ejercicio. *¿Cuantos menores de orden r tiene una matriz $n\times m$? Respuesta: $\binom{n}{r}\binom{m}{r}$.*

El método de Cramer para resolver sistemas. Si A es una matriz $n\times n$ invertible y b un vector de n componentes, entonces el sistema lineal clásico $Ax=b$ siempre es compatible determinado y su solución se puede expresar mediante la *regla de Cramer*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

donde A_i es la matriz que se obtiene al substituir la columna i de la matriz A por la columna b. Si la matriz A es grande, la regla de Cramer es peligrosa.

Problema relacionado. *7.*

Un método para invertir matrices. Si A es una matriz invertible, $\det A \neq 0$ y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\operatorname{Adj} A)^\top,$$

donde $\operatorname{Adj} A$ es la *matriz adjunta* de A. La matriz adjunta se calcula así:

$$\operatorname{Adj} A = (\alpha_{ij}) \qquad \alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}.$$

Ejercicio. *Probar la fórmula anterior sabiendo que si x_j es la columna j de la inversa de A y e_j es el vector j de la base canónica, entonces $Ax_j = e_j$, $j=1,\ldots,n$. (Indicación: Cramer.)*

Problema relacionado. *6.*

El determinante de n vectores. Sea E un ev de dimensión n y $U=(u_1,\ldots,u_n)$ una de sus bases. Sean $v_1,\ldots,v_n \in E$ tales que $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}u_i$. Sea $A=(a_{ij})$. Es decir, la columna j de la matriz A es igual a las coordenadas del vector v_j en la base U. Entonces

$$\det{}_U(v_1,\ldots,v_n) := \det A.$$

El valor del determinante depende de la base escogida, pero los vectores $v_1,\ldots,v_n$ son ld si y sólo si su determinante (en cualquier base) es cero.

Problema relacionado. *5.*

El determinante de un endomorfismo. Sea E un ev de dimensión finita y $f : E \to E$ un endomorfismo. Sea A la matriz de f en una base U de E, es decir, $A = M_U^U(f)$. Entonces

$$\det f := \det A.$$

El valor del determinante no depende de la base escogida y f es biyectiva si y sólo si $\det f \neq 0$.

PROBLEMA RELACIONADO. *8.*

Diagonalización

Ejemplos introductorios. Sea $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal definida por

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto f(M) = \begin{pmatrix} -15a - 20b + 9c + 12d & 10a + 15b - 6c - 9d \\ -18a - 24b + 12c + 16d & 12a + 18b - 8c - 12d \end{pmatrix}.$$

Esta aplicación parece complicada. Por ejemplo, trabajando en la base natural N de $M_2(\mathbb{R})$ dada por

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz de la aplicación es el siguiente monstruo:

$$A = M_N^N(f) = \begin{pmatrix} -15 & -20 & 9 & 12 \\ 10 & 15 & -6 & -9 \\ -18 & -24 & 12 & 16 \\ 12 & 18 & -8 & -12 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, la aplicación f no es tan complicada como parece cuando nos sacamos de la manga la base U de $M_2(\mathbb{R})$ dada por

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad u_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Resulta sencillo comprobar que la imagen de cada uno de estos elementos es un múltiplo del propio elemento. Concretamente, si $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$ y $\lambda_4 = -2$, entonces

$$f(u_1) = \lambda_1 u_1 = u_1 \qquad f(u_2) = \lambda_2 u_2 = -u_2 \qquad f(u_3) = \lambda_3 u_3 = 2u_3 \qquad f(u_4) = \lambda_4 u_4 = -2u_4.$$

Por tanto, la matriz del endomorfismo f en la base U es diagonal:

$$D = M_U^U(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO. *Ver que $SD = AS$, si S es la matriz del cambio de base que pasa de base U a base N:*

$$S = C_N^U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Indicación: No es necesario matarse haciendo el cálculo, basta recordar que $M_U^U(f) = C_U^N M_N^N(f) C_N^U$.)

Así pues, hemos *diagonalizado* f. De paso, hemos comprobado que f es *diagonalizable*, es decir, que se puede diagonalizar. Obviamente, esto plantea las siguientes preguntas:

- ¿Todos los endomorfismos son diagonalizables?
- En caso negativo, ¿cómo se sabe si un endomorfismo dado es (o no) diagonalizable?
- Finalmente, cuando ya sabemos que un endomorfismo es diagonalizable, ¿cómo se diagonaliza?

La primera respuesta es no, ya que el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base natural es

$$J = M_N^N(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

no es diagonalizable. Si lo fuera, existirían una matriz diagonal D y una matriz invertible S,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad S = C_N^U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

tales que $\begin{pmatrix} \lambda_1\alpha & \lambda_2\beta \\ \lambda_1\gamma & \lambda_2\delta \end{pmatrix} = SD = JS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$.

EJERCICIO. *Comprobar que eso es imposible.*

Diagonalización de matrices versus diagonalización de endomorfismos. Sea $f : E \to E$ un endomorfismo de un $\mathbb{K}$-ev de dimensión n. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ la matriz de f en alguna base de E. El problema de diagonalizar el endomorfismo f es similar al problema de diagonalizar la matriz A, ya que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- Existe una base $U = (u_1, \ldots, u_n)$ de E y unos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que
$$f(u_j) = \lambda_j u_j \qquad j = 1, \ldots, n.$$
- Existe una base U de E tal que la matriz $M_U^U(f)$ es diagonal.
- Existen en $M_n(\mathbb{K})$ una matriz diagonal D y una matriz invertible S tales que $SD = AS$.

Cuando estas condiciones se verifican diremos que f (y A) son *diagonalizables*.

Sólo hablaremos de matrices pues son más sencillas que los endomorfismos. Cuando nos pidan trabajar con un endomorfismo realizaremos los siguientes pasos:

1. Calcular la matriz del endomorfismo en alguna base adecuada.
2. Estudiar la diagonalización de esa matriz.
3. Trasladar los resultados al contexto inicial.

El polinomio característico. VAPs y VEPs. Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, su *polinomio característico* es

$$Q_A(t) = \det(A - t\mathrm{Id}) \in \mathbb{K}_n[t].$$

Las raíces de $Q_A(t)$ son los *valores propios (VAPs)* de la matriz A. El conjunto de todos los VAPs es el *espectro* de la matriz y se escribe $\sigma(A)$. Si λ es un VAP de A, el sev $E_\lambda = \mathrm{Nuc}(A - \lambda\mathrm{Id}) \subset \mathbb{K}^n$ es el *sev propio* asociado al VAP λ. Los *vectores propios (VEPs)* de un VAP $\lambda \in \sigma(A)$ son los vectores no nulos de E_λ. La *traza* de una matriz es la suma de los elementos que están situados en la diagonal de la matriz y se escribe $\mathrm{traza}\, A$.

EJERCICIO. *Calcular el polinomio característico, los VAPs y los VEPs de las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las principales propiedades del polinomio característico, los VAPs y los VEPs son las siguientes.

- A es invertible si y sólo si $0 \notin \sigma(A)$.
- $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \det(A - \lambda\mathrm{Id}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rango}(A - \lambda\mathrm{Id}) < n \Leftrightarrow \mathrm{Nuc}(A - \lambda\mathrm{Id}) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda$ tiene VEPs.
- Un vector $v \in \mathbb{K}^n$ es un VEP de VAP λ de la matriz A si y sólo si $Av = \lambda v$ y $v \neq 0$.
- $\mathrm{gr}[Q_A(t)] = n$, luego A no puede tener más de n VAPs diferentes.
- Si $Q_A(t) = q_0 - q_1 t + \cdots + (-1)^{n-1} q_{n-1} t^{n-1} + (-1)^n q_n t^n$, entonces:
$$q_0 = \det A \qquad q_{n-1} = \mathrm{traza}\, A \qquad q_n = 1.$$
- Si $Q_A(t)$ descompone totalmente en $\mathbb{K}$, es decir, si $Q_A(t) = \prod_{j=1}^{l} (\lambda_j - t)^{\alpha_j}$ con $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{K}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{N}$, entonces $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$ y
  - $\det A = \prod_{j=1}^{l} \lambda_j^{\alpha_j}$ = producto de todos los VAPs repetidos según multiplicidad.

- traza $A = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \lambda_j$ = suma de todos los VAPs repetidos según multiplicidad. Repetido según multiplicidad significa que un VAP doble aparece 2 veces, uno triple 3 veces, etc.

- Varios de estos objetos son invariantes por cambios de base. Si $B = S^{-1}AS$, entonces
$$Q_B(t) = Q_A(t) \qquad \sigma(B) = \sigma(A) \qquad \det B = \det A \qquad \operatorname{traza} B = \operatorname{traza} A.$$
- Los VAPs de una matriz diagonal (o triangular) son los elementos de la diagonal de la matriz.
- *VEPs de VAPs diferentes siempre son li:* Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ son VAPs distintos de A, entonces la suma $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_l}$ es directa.
- *T$^{\text{a}}$ de Cayley-Hamilton:* $Q_A(t) = q_0 + q_1 t + \cdots + q_n t^n \Rightarrow Q_A(A) := q_0 \mathrm{Id} + q_1 A + \cdots + q_n A^n = \mathbf{0}$.

Ejercicio. *Como $Q_A(t) = \det(A - t\mathrm{Id})$, vemos que $Q_A(A) = \det(A - A \cdot \mathrm{Id}) = \det(A - A) = \det(\mathbf{0}) = 0$. ¿Por qué esta demostración del Teorema de Cayley-Hamilton es incorrecta?*

Ejercicio. *Encontrad ejemplos que pongan de manifiesto las siguientes afirmaciones.*

1. $\operatorname{traza}(AB) \neq (\operatorname{traza} A) \cdot (\operatorname{traza} B)$.
2. *Existen matrices reales sin ningún VAP real.*

Problemas relacionados. *4 y 17.*

El criterio de diagonalización. Buscamos condiciones necesarias y suficientes para que una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalice sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. En la mayoría de los casos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Si $\lambda \in \sigma(A)$, sus *multiplicidades algebraica y geométrica* se definen como:

- $\mathrm{ma}(\lambda)$ = multiplicidad de λ como raíz del polinomio $Q_A(t)$.
- $\mathrm{mg}(\lambda) = \dim E_\lambda = \dim[\mathrm{Nuc}(A - \lambda\mathrm{Id})] = n - \operatorname{rango}(A - \lambda\mathrm{Id})$.

Es decir, $\mathrm{ma}(\lambda)$ es el exponente del factor $(t - \lambda)^\alpha$ en la factorización del polinomio característico, mientras que $\mathrm{mg}(\lambda)$ el número de VEPs li de VAP λ. Estas multiplicidades satisfacen la desigualdad
$$1 \leq \mathrm{mg}(\lambda) \leq \mathrm{ma}(\lambda) \qquad \forall \lambda \in \sigma(A).$$
Finalmente, el *criterio de diagonalización* establece que A es diagonalizable sobre $\mathbb{K}$ si y sólo si:

1. Su polinomio característico descompone totalmente en $\mathbb{K}$: $\lambda \in \mathbb{K}$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$.
2. Las multiplicidades algebraicas y geométricas coinciden: $\mathrm{mg}(\lambda) = \mathrm{ma}(\lambda)$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$.

Problemas relacionados. *1, 2 y 3.*

El algoritmo de diagonalización. El algoritmo estándar para estudiar la diagonalización de una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ y, cuando sea posible, encontrar una matriz diagonal $D \in M_n(\mathbb{K})$ y una matriz invertible $S \in M_n(\mathbb{K})$ tales que $SD = AS$, consta de los siguientes pasos.

1. Calcular y factorizar el polinomio característico $Q_A(t)$.
2. Si existe $\lambda \in \sigma(A)$ tal que $\lambda \notin \mathbb{K}$, entonces A no diagonaliza en $\mathbb{K}$.
3. Comparar las multiplicidades algebraicas y geométricas de los VAPs. Si existe $\lambda \in \sigma(A)$ tal que $\mathrm{mg}(\lambda) < \mathrm{ma}(\lambda)$, entonces A no diagonaliza (en nigún cuerpo).
4. (Cuando $A = (a_{ij})$ diagonaliza y tiene VAPs $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{K}$ de multiplicidades $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{N}$.) Para cada VAP $\lambda = \lambda_j$, tenemos que encontrar $\alpha = \alpha_j$ VEPs li de VAP λ resolviendo el sistema homogéneo con α grados de libertad:
$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$
5. D se construye poniendo los VAPs en la diagonal, repetidos según multiplicidad.
6. S se construye poniendo los VEPs por columnas, en el mismo orden que los VAPs en D.
7. Comprobar que $SD = AS$. (Opcional.)

Problemas relacionados. *5, 6, 7, 8 y 11.*

Trucos. Los siguientes trucos pueden ayudarnos en algunas ocasiones.

- *Matando ecuaciones al calcular VEPs.* Cuando buscamos α VEPs li de VAP λ resolviendo el sistema homogéneo anterior, conviene recordar el grado de libertad de ese sistema es α. Por tanto, al escalonar el sistema para resolverlo, tienen que desaparecer exactamente α ecuaciones. Es decir, una ecuación si el VAP es simple, dos si es doble, tres si es triple, etc.
- *Los VAPs simples son inofensivos.* Si $\mathrm{ma}(\lambda) = 1$, entonces $\mathrm{mg}(\lambda) = \mathrm{ma}(\lambda)$. En particular, las matrices sin VAPs múltiples siempre diagonalizan.
- *Diagonalizando en* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si estamos estudiando una matriz real A, debemos tener en cuenta las siguientes propiedades:
  - El conjugado de un VAP de A, también es un VAP de A: $\lambda \in \sigma(A) \iff \overline{\lambda} \in \sigma(A)$.
  - El conjugado de un VEP de A, es un VEP del VAP conjugado: $v \in E_\lambda \iff \overline{v} \in E_{\overline{\lambda}}$.
  - Las multiplicidades no cambian al conjugar: $\mathrm{ma}(\lambda) = \mathrm{ma}(\overline{\lambda})$ y $\mathrm{mg}(\lambda) = \mathrm{mg}(\overline{\lambda})$.

  Estas propiedades son útiles, ya que permiten reducir el trabajo a la mitad. Al estudiar un VAP, automáticamente tenemos la información de su conjugado.

  Ejercicio. *Diagonalizar en los complejos la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -12 & -14 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. *(*$\sigma(A) = \{1, \pm 5\mathrm{i}\}$ *y una base de VEPs es* $v_1 = (25, -7, 6)^\top$, $v_2 = (26, 1+5\mathrm{i}, 1+5\mathrm{i})^\top$ *y* $v_3 = \overline{v_2}$.*)*
- *Cazando VAPs.* La traza y el determinante pueden servir para cazar algunos VAPs. Ejemplo: si $A \in M_3(\mathbb{R})$ es tal que $3 \in \sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, $\det A = 9$ y $\operatorname{traza} A = 7$, entonces

  $$\lambda_2 + \lambda_3 = (\operatorname{traza} A) - \lambda_1 = 4 \qquad \lambda_2\lambda_3 = (\det A)/\lambda_1 = 3$$

  luego $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 1$.

  Ejercicio. *Sea* $A \in M_4(\mathbb{R})$ *tal que* $3 + 2\mathrm{i} \in \sigma(A)$ *y* $\det A = \operatorname{traza} A = 0$. *Encontrar los VAPs.*
- *Cazando VEPs.* Para calcular los VEPs de un VAP λ, tenemos que calcular el núcleo de la matriz $A - \lambda\mathrm{Id}$. El núcleo se puede encontrar escalonando o a vista si somos capaces de ver las cl de columnas de la matriz $A - \lambda\mathrm{Id}$ que se anulan. Por ejemplo, el núcleo de la matriz

  $$(c_1|c_2|c_3|c_4) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 2 & 6 & 14 & 7 \\ -1 & -3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  contiene a los vectores $u = (3, -1, 0, 0)^\top$ y $v = (7, 0, -1, 0)^\top$, ya que la columnas cumplen las relaciones $c_2 = 3c_1$ y $c_3 = 7c_1$.
- *Inversas por Cayley-Hamilton.* Si la matriz A es invertible y $Q_A(t) = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \cdots + q_n t^n$,

$$\begin{aligned} Q_A(A) = \mathbf{0} \quad &\Longrightarrow \quad q_0\mathrm{Id} + q_1 A + q_2 A^2 + \cdots + q_n A^n = \mathbf{0} \\ &\Longrightarrow \quad -q_0\mathrm{Id} = q_1 A + q_2 A^2 + \cdots + q_n A^n = A\left(q_1\mathrm{Id} + q_2 A + \cdots + q_n A^{n-1}\right) \\ &\Longrightarrow \quad A^{-1} = -\left(q_1\mathrm{Id} + q_2 A + \cdots + q_n A^{n-1}\right)/q_0. \end{aligned}$$

  Ejercicio. *¿Dónde falla este método para cacular inversas cuando la matriz A no es invertible?*

  Problema relacionado. *10, apartado a).*
- *Potencias de matrices.* Si $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = S^{-1}AS$, entonces

  $$A^k = SD^kS^{-1} = S \cdot \operatorname{diag}\left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right) \cdot S^{-1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

  Cuando la matriz A es invertible, D también lo es pues todos los VAPs son diferentes de cero y la fórmula anterior se puede usar para toda $k \in \mathbb{Z}$.

  Problema relacionado. *10, apartado c).*

- *Ecuaciones con matrices.* La diagonalización es útil, entre otras cosas, para resolver ecuaciones con matrices que de otra forma serían tremendamente complicadas. Por ejemplo, supongamos que queremos calcular las raíces k-esimas de una matriz diagonalizable $A \in M_n(\mathbb{C})$. Es decir, buscamos todas las matrices $B \in M_n(\mathbb{C})$ tales que $B^k = A$. Aplicando el algoritmo de diagonalización anterior calculamos una matriz diagonal $D \in M_n(\mathbb{C})$ y una matriz invertible $S \in M_n(\mathbb{C})$ tales que $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = S^{-1}AS$. Entonces,

$$B = \sqrt[k]{A} = S\sqrt[k]{D}S^{-1} = S \cdot \operatorname{diag}\left(\sqrt[k]{\lambda_1}, \ldots, \sqrt[k]{\lambda_n}\right) \cdot S^{-1}.$$

  Así pues, una matriz diagonalizable con p VAPs no nulos (contados con multiplicidad) tiene al menos k^p raíces k-ésimas en los complejos.

  Este método sirve para calcular cosas más complicadas, como el coseno o el logaritmo de una matriz, pero eso es otra historia.

  Problema relacionado. *13.*

Problemas para no dormir. 9, 12, 14, 15, 16, 17 y 18.

Jordan

Ejemplo introductorio. Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ el endomorfismo definido por
$$f : P(x) \mapsto 2P(x) + P'(x) + P''(x) + P'''(x).$$
La matriz de f en base natural N de $\mathbb{R}_3[x]$ es
$$A = M_N^N(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Vamos a intentar diagonalizar este endomorfismo. Como la matriz A es triangular, resulta fácil calcular el polinomio característico: $Q_f(t) = (2-t)^4$. Por tanto, $\lambda = 2$ es el único VAP de f.

Un polinomio $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ es un VEP de VAP $\lambda = 2$ del endomorfismo f si y sólo si $2P(x) + P'(x) + P''(x) + P'''(x) = f(P(x)) = 2 \cdot P(x)$, o sea, si y sólo si
$$(2a_0 + a_1 + 2a_2 + 6a_3) + (2a_1 + 2a_2 + 6a_3)x + (2a_2 + 3a_3)x^2 + 2a_3x^3 = 2a_0 + 2a_1x + 2a_2x^2 + 2a_3x^3.$$
Resolviendo el sistema resultante, obtenemos que $a_3 = a_2 = a_1 = 0$ y $a_0 \in \mathbb{R}$ queda libre. Así pues, $\lambda = 2$ es el único VAP de f y los polinomios de grado cero son sus únicos VEPs: $\mathrm{Nuc}(f - 2\cdot\mathrm{Id}) = \mathbb{R}_0[x]$, de forma que $\mathrm{ma}(2) = 4$ y $\mathrm{mg}(2) = \dim[\mathrm{Nuc}(f - 2\cdot\mathrm{Id})] = 1$. Por tanto, f no diagonaliza.

Transcurridos unos (breves) momentos de pánico, decidimos que no está todo perdido y buscamos una base en la cual la matriz de f quede lo más simple posible, aunque no sea una matriz diagonal. Concretamente, nos sacamos de la manga la base U de $\mathbb{R}_3[x]$ formada por los polinomios
$$P_1(x) = x^3 \qquad P_2(x) = 6 + 6x + 3x^2 \qquad P_3(x) = 12 + 6x \qquad P_4(x) = 6.$$
Resulta sencillo comprobar que las imágenes de los elementos de esta base son:
$$\begin{aligned} f(P_1(x)) &= \lambda \cdot P_1(x) + P_2(x) = 2 \cdot P_1(x) + P_2(x) \\ f(P_2(x)) &= \lambda \cdot P_2(x) + P_3(x) = 2 \cdot P_2(x) + P_3(x) \\ f(P_3(x)) &= \lambda \cdot P_3(x) + P_4(x) = 2 \cdot P_3(x) + P_4(x) \\ f(P_4(x)) &= \lambda \cdot P_4(x) = 2 \cdot P_4(x). \end{aligned}$$
Por tanto, la matriz del endomorfismo f en la base U es:
$$J = M_U^U(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
donde $\lambda = 2$ es el único VAP del endomorfismo f.

Ejercicio. *Ver que $SJ = AS$, si S es la matriz del cambio de base que pasa de base U a base N:*
$$S = C_N^U = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
(Indicación: No es necesario matarse haciendo el cálculo, basta recordar que $M_U^U(f) = C_U^N M_N^N(f) C_N^U$.)

Antes de pasar a las definiciones, observamos que una base $V = (Q_1(x), Q_2(x), Q_3(x), Q_4(x))$ de $\mathbb{R}_3[x]$ cumple que $M_V^V(f) = J$ si y sólo si

$$\begin{array}{rcl} Q_2(x) & = & (f - \lambda \cdot \mathrm{Id})(Q_1(x)) \\ Q_3(x) & = & (f - \lambda \cdot \mathrm{Id})(Q_2(x)) = (f - \lambda \cdot \mathrm{Id})^2(Q_1(x)) \\ Q_4(x) & = & (f - \lambda \cdot \mathrm{Id})(Q_3(x)) = (f - \lambda \cdot \mathrm{Id})^3(Q_1(x)). \end{array}$$

Es decir, la elección del primer elemento $Q_1(x)$ de la base V, determina el resto de la base.

EJERCICIO. *¡Entender bien esto! A continuación, comprobar que se obtiene a partir de $Q_1(x) = x^2$. (Respuesta: $Q_2(x) = 2 + 2x$, $Q_3(x) = 2$ y $Q_4(x) = 0$, luego V no es una base. ¡Qué mala suerte!)*

Bloques de Jordan, matrices de Jordan y bases de Jordan. Dado un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ y un natural $r \in \mathbb{N}$, $J_r(\lambda)$ denotará la matriz $r \times r$ cuyos elementos diagonales son igual al escalar λ, cuyos elementos subdiagonales son igual a uno y el resto son nulos. Por ejemplo,

$$J_1(\lambda) = (\lambda) \qquad J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad J_4(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Las matrices de la forma $J_r(\lambda)$ son *bloques de Jordan*. Las matrices diagonales por bloques, cuyos bloques diagonales son bloques de Jordan, son *matrices de Jordan*. Por ejemplo, hay seis tipos diferentes de matrices 3×3 de Jordan, a saber:

$$\begin{array}{ccc} D = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \lambda) & D' = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \mu) & D'' = \mathrm{diag}(\lambda, \mu, \eta) \\ J = J_3(\lambda) & J' = \mathrm{diag}(J_2(\lambda), \lambda) & J'' = \mathrm{diag}(J_2(\lambda), \mu). \end{array}$$

Tradicionalmente, el orden de los bloques no se tiene en cuenta. Por ejemplo, se considera que las matrices $\mathrm{diag}(J_2(\lambda), \lambda)$ y $\mathrm{diag}(\lambda, J_2(\lambda))$ representan la misma forma reducida de Jordan.

Si tenemos un endomorfismo $f : E \to E$ y una base U del ev E tal que $J = M_U^U(f)$ es una matriz de Jordan, diremos que J es la *matriz de Jordan de f* o también que es la *forma reducida de Jordan de f*, mientras que U es una *base de Jordan de f*. Estas definiciones plantean las siguientes preguntas:

- ¿Es verdad que todos los endomorfismos tiene una (única) matriz de Jordan?
- ¿Cómo se calcula la matriz de Jordan de un endomorfismo?
- ¿Cómo se calcula una base de Jordan de un endomorfismo?

Jordan de matrices versus Jordan de endomorfismos. Sea $f : E \to E$ un endomorfismo de un $\mathbb{K}$-ev de dimensión n. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ la matriz de f en alguna base de E. El problema de encontrar la forma reducida de Jordan del endomorfismo f es similar al problema de encontrar la forma reducida de Jordan de la matriz A, ya que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- Existe una base $U = (u_1, \ldots, u_n)$ de E, unos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ y otros escalares $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1} \in \{0, 1\}$ tales que
$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(u_1) & = & \lambda_1 u_1 + \gamma_1 u_2 \\ f(u_2) & = & \lambda_2 u_2 + \gamma_2 u_3 \\ & \vdots & \\ f(u_{n-1}) & = & \lambda_{n-1} u_{n-1} + \gamma_{n-1} u_n \\ f(u_n) & = & \lambda_n u_n. \end{array} \right.$$
- Existe una base U de E tal que la matriz $M_U^U(f)$ es de Jordan.
- Existen en $M_n(\mathbb{K})$ una matriz de Jordan J y una matriz invertible S tales que $SJ = AS$.

Sólo hablaremos de matrices pues son más sencillas que los endomorfismos. Cuando nos pidan trabajar con un endomorfismo realizaremos los siguientes pasos:

1. Calcular la matriz del endomorfismo en alguna base adecuada.
2. Estudiar la forma reducida de Jordan de esa matriz.
3. Trasladar los resultados al contexto inicial.

Sev invariantes, restricciones y diagonalización por bloques. Sea $f : E \to E$ un endomorfismo de un $\mathbb{K}$-ev, $U = (u_1, \ldots, u_n)$ una base de E y $A = M_U^U(f)$ la matriz del endomorfismo f en la base U. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- Los sev $F = [u_1, \ldots, u_r]$ y $G = [u_{r+1}, \ldots, u_n]$ son invariantes por el endomorfismo f.
- Existen unas matrices $B \in M_r(\mathbb{K})$ y $C \in M_{n-r}(\mathbb{K})$ tales que $A = \begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}$.

Por tanto, existe una relación entre los sev invariantes y la diagonalización por bloques. Esto hace que la búsqueda de sev invariantes sea uno de los aspectos claves de este tema. A nivel teórico, efectuaremos esta búsqueda en dos pasos:

- En el *Primer Teorema de Descomposición*, asociaremos a cada VAP un gran sev invariante.
- En el *Segundo Teorema de Descomposición*, trocearemos esos sev invariantes en otros menores.

A nivel práctico, daremos un algoritmo que resuelve completamente el problema de una sola tacada.

A continuación, listamos otras propiedades interesantes de los sev invariantes.

- La suma e interseccion de sev invariantes también son sev invariantes.
- $[u]$ es un sev invariante por f si y sólo si u es un VEP de f.
- Si λ es un VAP de f, entonces el sev propio $E_\lambda = \mathrm{Nuc}(f - \lambda \cdot \mathrm{Id})$ es invariante por f.
- Si $Q(t) \in \mathbb{K}[t]$, entonces los sev $\mathrm{Nuc}[Q(f)]$ e $\mathrm{Im}[Q(f)]$ son invariantes por f.

Ejercicio. *Sea $f : E \to E$ un endomorfismo y $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ una base de E. Supongamos que los sev $F = [u_1, u_2, u_3]$ y $G = [u_2, u_3, u_4]$ son invariantes por f y sea $A = M_U^U(f) = (a_{ij})$ la matriz del endomorfismo f en la base U. ¿Qué elementos de la matriz A podemos afirmar que son nulos? (Respuesta: $a_{41}, a_{12}, a_{42}, a_{13}, a_{43}, a_{14}$.)*

Sea $f : E \to E$ un endomorfismo y F un sev invariante por f. Entonces podemos definir el endomorfismo $f_{|F} : F \to F$ tal que

$$f_{|F}(v) = f(v) \qquad \forall v \in F.$$

Esta aplicación es la *aplicación restricción de f en F*.

Ejemplo. *Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ la aplicación de la introducción y sea $F = \mathbb{R}_1[x]$. Resulta que F es un sev invariante por f. Además, la matriz de la restricción $f_{|F}$ en la base W del sev F formada por los polinomios $P_3(x) = 12 + 6x$ y $P_4(x) = 6$ es*

$$M_W^W(f_{|F}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El polinomio mínimo. El *polinomio mínimo* de una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ es el polinomio mónico de grado mínimo $P_A(t)$ tal que

$$P_A(A) = \mathbf{0}.$$

Ejercicio. *Probar que la definición anterior es correcta. Es decir, probar que no pueden existir dos polinomios diferentes mónicos de grado mínimo que anulen a la matriz A.*

Las principales propiedades del polinomio mínimo son las siguientes.

- Las raíces del polinomio mínimo coinciden con los VAPs: $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0$.
- El polinomio mínimo divide a los polinomios que anulan a A: $Q(A) = \mathbf{0} \Rightarrow P_A(t)|Q(t)$.
- El polinomio mínimo divide al polinomio característico: $P_A(t)|Q_A(t)$.
- $\mathrm{gr}[P_A(t)] \le \mathrm{gr}[Q_A(t)] = n$.
- Si $Q_A(t)$ descompone totalmente en $\mathbb{K}$, es decir, si $Q_A(t) = \prod_{j=1}^{l} (\lambda_j - t)^{\alpha_j}$ con $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{K}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{N}$, entonces
  - $P_A(t) = \prod_{j=1}^{l} (t - \lambda_j)^{\beta_j}$ con $1 \le \beta_j \le \alpha_j$ para toda $j = 1, \ldots, l$.
  - La matriz A diagonaliza si y sólo si $\beta_j = 1$ para toda $j = 1, \ldots, l$.
- El polinomio mínimo es invariante por cambios de base: $B = S^{-1}AS \Rightarrow P_B(t) = P_A(t)$.

EJERCICIO. *Calcular el polinomio mínimo y el polinomio característico de las matrices*

$$D = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda, \lambda) \qquad J = J_3(\lambda) \qquad J' = \operatorname{diag}(J_2(\lambda), \lambda).$$

(Respuesta: $Q_D(t) = Q_J(t) = Q_{J'}(t) = (\lambda - t)^3$, $P_D(t) = t - \lambda$, $P_J(t) = (t-\lambda)^3$ y $P_{J'}(t) = (t-\lambda)^2$.)

Primer Teorema de Descomposición. Sea $f : E \to E$ un endomorfismo de un $\mathbb{K}$-ev tal que su polinomio característico descompone totalmente en $\mathbb{K}$: $Q_f(t) = \prod_{j=1}^{l}(\lambda_j - t)^{\alpha_j}$. Aquí, $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{K}$ son los VAPs de f y los exponentes $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{N}$ son sus multiplicidades algebraicas: $\operatorname{ma}(\lambda_j) = \alpha_j$.

Vamos a descomponer E como una suma de sev invariantes asociados a los diferentes VAPs del endomorfismo f. Sea $P_f(t) = \prod_{j=1}^{l}(t - \lambda_j)^{\beta_j}$ el polinomio mínimo, con $1 \leq \beta_j \leq \alpha_j$. Sabemos que los sev $\bar{E}_j = \operatorname{Nuc}(f - \lambda_j \cdot \operatorname{Id})^{\alpha_j}$ son invariantes. Sean $\bar{f}_j = f_{|\bar{E}_j} : \bar{E}_j \to \bar{E}_j$ sus restricciones. Entonces:

- $\dim \bar{E}_j = \alpha_j$ y $\bar{E}_j = \operatorname{Nuc}(f - \lambda_j \cdot \operatorname{Id})^{\beta_j}$.
- La primera descomposición es: $E = \bar{E}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{E}_l$.
- $Q_{\bar{f}_j}(t) = (\lambda_j - t)^{\alpha_j}$ y $P_{\bar{f}_j}(t) = (t - \lambda_j)^{\beta_j}$.

Segundo Teorema de Descomposición. A lo largo de esta sección supondremos que estamos en las siguientes hipótesis. Sea $\bar{f} : \bar{E} \to \bar{E}$ un endomorfismo tal que $\dim \bar{E} = \alpha$, $Q_{\bar{f}}(t) = (\lambda - t)^{\alpha}$ y $P_{\bar{f}}(t) = (t-\lambda)^{\beta}$, con $1 \leq \beta \leq \alpha$. Es decir, $\bar{E}$ es como los sev invariantes que acabamos de obtener en la primera descomposición. Queremos descomponer $\bar{E}$ en sev invariantes más pequeños.

Si calculamos las dimensiones $k_j = \dim[\operatorname{Nuc}(\bar{f} - \lambda \cdot \operatorname{Id})^j]$, para $j = 1, \ldots, \beta$, resulta que

$$1 \leq \operatorname{mg}(\lambda) = k_1 < k_2 < \cdots < k_\beta = \alpha = \operatorname{ma}(\lambda).$$

Después, dibujamos un diagrama de cajas con k_1 cajas en el primer piso, $k_2 - k_1$ cajas en el segundo, $k_3 - k_2$ en el tercero, etc. El exponente $\alpha = \operatorname{ma}(\lambda)$ del polinomio característico es igual al número total de cajas del diagrama, el exponente β del polinomio mínimo da la altura del diagrama y la multiplicidad geométrica $p = k_1 = \operatorname{mg}(\lambda)$ es igual al número de cajas del primer piso. El diagrama estará escalonado, es decir, un piso no puede contener mas cajas que el inferior.

Sea δ_j la altura de la columna j. Entonces $\beta = \delta_1 \geq \delta_2 \geq \cdots \delta_p \geq 1$ y $\delta_1 + \cdots + \delta_p = \alpha$. En estas condiciones, existen p vectores $u_1, \ldots, u_p \in \bar{E}$ tales que los α vectores

$$\begin{cases} u_1, (\bar{f} - \lambda \cdot \operatorname{Id})(u_1), \ldots, (\bar{f} - \lambda \cdot \operatorname{Id})^{\delta_1 - 1}(u_1) \\ u_2, (\bar{f} - \lambda \cdot \operatorname{Id})(u_2), \ldots, (\bar{f} - \lambda \cdot \operatorname{Id})^{\delta_2 - 1}(u_2) \\ \vdots \\ u_p, (\bar{f} - \lambda \cdot \operatorname{Id})(u_p), \ldots, (\bar{f} - \lambda \cdot \operatorname{Id})^{\delta_p - 1}(u_p) \end{cases}$$

forman una base de $\bar{E}$ y la matriz de la aplicación $\bar{f}$ en esta base es la matriz de Jordan

$$J = \operatorname{diag}(J_{\delta_1}(\lambda), \ldots, J_{\delta_2}(\lambda)).$$

En particular, los sev $F_j = [u_j, (\bar{f} - \lambda \cdot \operatorname{Id})(u_j), \ldots, (\bar{f} - \lambda \cdot \operatorname{Id})^{\delta_j - 1}(u_j)]$, $j = 1, \ldots, p$, son invariantes por $\bar{f}$ y la segunda descomposición es $\bar{E} = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

EJERCICIO. *Probar que $\bar{f}$ es diagonalizable si y sólo si $\beta = 1$. Probar que un endomorfismo general $f : E \to E$ cuyo polinomio mínimo es $P_f(t) = \prod_{j=1}^{l}(t - \lambda_j)^{\beta_j}$ diagonaliza si y sólo si $\beta_1 = \cdots = \beta_l = 1$.*

PROBLEMAS RELACIONADOS. *1, 2 y 3.*

Una pregunta natural es ¿cómo se encuentran los vectores $u_1, \ldots, u_p \in \bar{E}$? Es decir, ¿cuándo forman una base los α vectores anteriores? Respuesta: Si y sólo si los p vectores

$$(\bar{f} - \lambda \cdot \operatorname{Id})^{\delta_1 - 1}(u_1), (\bar{f} - \lambda \cdot \operatorname{Id})^{\delta_2 - 1}(u_2), \ldots (\bar{f} - \lambda \cdot \operatorname{Id})^{\delta_p - 1}(u_p)$$

son li. Además, estos p vectores son una base del sev propio $\bar{E}_\lambda = \operatorname{Nuc}(\bar{f} - \lambda \cdot \operatorname{Id})$. En particular, son VEPs de VAP λ del endomorfismo $\bar{f}$.

Un truco útil consiste en colocar cada uno de estos α vectores en una de las α cajas del diagrama, siguiendo una reglas fáciles de recordar que explicaremos en la próxima sección.

El algoritmo de Jordan. El algoritmo estándar para calcular la forma de Jordan J de una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ cuyo polinomio característico descompone totalmente consta de los siguientes pasos.

1. Calcular y factorizar el polinomio característico: $Q_A(t) = \prod_{j=1}^{l}(\lambda_j - t)^{\alpha_j}$.
2. Para cada VAP $\lambda = \lambda_j$ de multiplicidad algebraica $\alpha = \alpha_j$, tenemos que:
   a) Calcular las dimensiones $k_j = \dim[\mathrm{Nuc}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^j]$, $j = 1, \ldots, \beta$, siendo β el primer número tal que $k_\beta = \alpha$.
   b) Dibujar el diagrama de cajas con k_1 cajas en el primer piso, $k_2 - k_1$ cajas en el segundo, $k_3 - k_2$ en el tercero, etc. El diagrama tiene α cajas, β pisos y k_1 columnas.
   c) A cada columna del diagrama, le asociamos el bloque de Jordan $J_\delta(\lambda)$, donde δ es la altura de la columna.
3. La matriz de Jordan J tiene todos los bloques anteriores en la diagonal.

Si además queremos encontrar una matriz invertible $S \in M_n(\mathbb{K})$ tales que $SJ = AS$, entonces:

4. Situamos un vector en cada caja de los diagramas anteriores del siguiente modo:
   a) *Escoger el techo.* En la caja superior (techo) de cada columna ponemos cualquier vector $u \in \mathrm{Nuc}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^\delta$ tal que $u \notin \mathrm{Nuc}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{\delta-1}$, siendo λ el VAP de ese diagrama y δ la altura de esa columna.
   b) *Bajar al suelo.* En el resto de cajas de la columna colocamos los vectores
   $$(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})(u), (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^2(u), \ldots, (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{\delta-1}(u)$$
   de arriba a abajo, donde u es el vector que hemos situado en la caja superior.
   c) *Comprobar el suelo.* Los vectores de las cajas inferiores (suelo) deben ser li. (Además, son VEPs.) Si no, cambiamos algunos vectores del techo y repetimos los pasos (b) y (c).
5. Esos vectores, ordenados de arriba a abajo y de izquierda a derecha, son una base de Jordan.
6. S se construye poniendo los vectores de la base de Jordan por columnas.
7. Comprobar que $SJ = AS$. (Opcional.)

PROBLEMAS RELACIONADOS. *Clasificamos los problemas de cálculo de Jordan en 4 tipos, según dificultad:*

- *Jordan con un único bloque: 5c, 5e, 6b y 16a.*
- *Jordan con varios bloques, pero con un único VAP: 4, 5a, 5b y 5d.*
- *Jordan con varios VAPs: 5f.*
- *Jordan con parámetros: 6a.*

Trucos. Los siguientes trucos pueden ser útiles en ocasiones:

- *VAPs de multiplicidad geométrica igual a uno.* Si λ es un VAP tal que $\mathrm{ma}(\lambda) = \alpha$ y $\mathrm{mg}(\lambda) = 1$, entonces $\beta = \alpha$ y $k_j = j$ para $j = 1, \ldots, \beta$. Es decir, el diagrama de λ sólo tiene una columna.
- *Simplificando el cálculo de β.* Sea λ un VAP tal que $\mathrm{ma}(\lambda) = \alpha$. Supongamos que al calcular las dimensiones $k_j = \dim[\mathrm{Nuc}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^j]$, $j \geq 1$, vemos que una de ellas es $k_s = \alpha - 1$. Entonces no hace falta seguir, pues $k_\beta = k_{s+1} = \alpha$. Es decir, cuando sólo nos queda una caja, sólo podemos colocarla en un sitio: encima de la penúltima.
- *Matrices con un único VAP.* Si la matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ tiene un único VAP: $\sigma(A) = \{\lambda\}$, entonces $Q_A(t) = (\lambda - t)^\alpha$ y $P_A(t) = (t - \lambda)^\beta$ con $n = \alpha \geq \beta \geq 1$. En este caso, siempre podremos conseguir que el primer vector de la base de Jordan sea un vector de la base natural $N = (e_1, \ldots, e_n)$. Basta encontrar e_j tal que $(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{\beta-1} e_j \neq \mathbf{0}$. (Ejemplo: Problema 4.)
- *¿Cuántos VEPs tiene una base de Jordan?* Los vectores del suelo son VEPs y el resto no. Por tanto, basta contar las cajas del suelo.
- *Obteniendo información del polinomio mínimo y similares.* Veamos dos ejemplos:
  - Sea $f : E \to E$ un endomorfismo tal que $f^3 = 4 \cdot f$. Es decir, el polinomio $P(t) = t^3 - 4t = t(t-2)(t+2)$ anula a f, luego $P_f(t) | P(t)$. Esto implica que todos los factores

del polinomio mínimo son simples y, por tanto, f diagonaliza. Si además sabemos que $f^2 \neq 4 \cdot \mathrm{Id}$, entonces $P_f(0) = 0$ y f no es invertible.

- Sea $f : E \to E$ un endomorfismo tal que $f^2 - 2 \cdot f + \mathrm{Id} = \mathbf{0}$. Es decir, el polinomio $P(t) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$ anula a f, luego $P_f(t)|P(t)$. Por tanto, el único VAP de f es $\lambda = 1$. Si además sabemos que $f \neq \mathrm{Id}$, entonces $P_f(t) = (t-1)^2$ y f no es diagonalizable.

Cálculo de sev invariantes. Una vez hemos encontrado una base de Jordan poniendo un vector en cada caja del diagrama, resulta sencillo encontrar varios sev invariantes, aunque no todos. La idea consiste en buscar sev invariantes que esten generados por algunos vectores de la base de Jordan. La cuestión es ¿cómo se escogen los vectores de la base de Jordan de forma que el sev que generen sea invariante? La respuesta es la siguiente: *Si cogemos un vector de la base de Jordan, también tenemos que coger todos los vectores de la base de Jordan situados en las cajas inferiores de esa columna.*

EJERCICIO. *Probar que esto funciona.*

PROBLEMAS RELACIONADOS. *7 y 11.*

Equivalencia de matrices o endomorfismos. Decimos que dos matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ son *equivalentes* cuando existe una matriz invertible $S \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $B = S^{-1}AS$. Es decir, cuando puede pasar de una a otra mediante un cambio de base. En tal caso, escribiremos el símbolo $A \sim B$. (Desafortunadamente, es el mismo símbolo que el usado cuando se escalona una matriz mediante transformaciones elementales, pero son cosas diferentes.) Análogamente, decimos que dos endomorfismos $f, g : E \to E$ son *equivalentes* cuando existen dos bases U y V del ev E tales que $M_U^U(f) = M_V^V(g)$.

Los resultados principales relacionados con matrices equivalentes son:

- $A \sim B \Leftrightarrow J_A = J_B$, donde J_A y J_B son las formas de Jordan de A y B.
- $A \sim B \Rightarrow \det A = \det B$ y $\operatorname{traza} A = \operatorname{traza} B$.
- $A \sim B \Rightarrow Q_A(t) = Q_B(t)$ y $P_A(t) = P_B(t)$.

Así pues, matrices con diferentes determinantes (o trazas, o polinomios característicos, o polinomios mínimos) no pueden ser equivalentes. Estos resultados también son válidos para endomorfismos.

PROBLEMAS RELACIONADOS. *8, 9 y 10.*

Problemas para no dormir. 12, 13, 14, 15, 16b y 17.